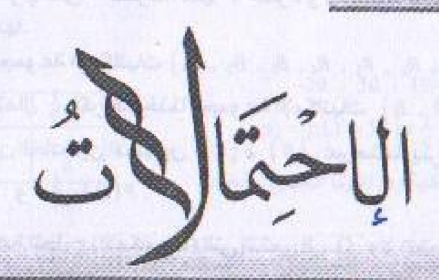


❶ - الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية

1 - 1 احتمال حادثة (تذكير)

- بصفة عامة نرمز ب e_1 ، e_2 ، ...... ، e_n إلى النتائج المكنة أو المخارج لتجربة عشوائية ، نقول عن هذه التجربة أنها تحتوي على عدد منته من المخارج ونرمز بـ Ω إلى مجموعة الإمكانيات ونكتب $\Omega = \{ e_1 , e_2 , ... e_n \}$.
- الحادث A هو مجموعة جزئية من مجموعة الإمكانيات
- الحادث الأولي هو حادث يشمل إمكانية واحدة مثل $A = \{ e_2 \}$.

نرفق بكل حادث أولي $\{ e_i \}$ العدد $p_i = p(e_i)$ الذي يسمى احتمال الحادث $\{ e_i \}$

مع $0 \leq p_i \leq 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

نقول عندئذ أننا عرفنا احتمال على Ω .

- احتمال الحادث A ترمز له بـ $P(A)$ وهو مجموع احتمالات الحوادث الأولية المحتواة في A

إذا كان $p(\Omega) = 1$ نقول أن Ω حادث أكيد.

وإذا كان $p(\phi) = 0$ نقول أن ϕ حادث مستحيل.

- نقول عن حوادث أولية أنها متساوية الاحتمال إذا كان $p_i = p_j$ وهذا مهما كان العددان i و j .

إذا كان هذا العدد هو n فإن $p_i = \frac{1}{n}$ واحتمال الحادث A يعطى بـ :

$$P(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر}}{\Omega \text{ عدد عناصر}} = \frac{A \text{ عدد الحالات اللائمة لتحقيق}}{\text{عدد الحالات المكنة}}$$

- تساوي الاحتمال هو فرض نستنتجه من النص بواسطة تعابير مثل رمي زهرة نرد متجانسة، رمي قطعة نقدية متزنة أو اختيار كرة عشوائيا من بين n كرة موجودة في كيس.
وللحصول على تساوي الاحتمال يجب ان تكون مجموعة الإمكانيات مشكلة من n مخرج، لأنه إذا بدلنا هذه المجموعة بمجموعة اخرى حتى ولو كان الاختيار فيها عشوائي، فإن تساوي الاحتمال بشكل عام غير محقق (نفقده).

مثال - ♦

كيس يحتوي على 7 كرات، منها 4 حمراء و 3 بيضاء، نسحب عشوائيا كرة ونسجل لونها. •

إذا أخذنا مجموعة الإمكانيات $\{R_1, R_2, R_3, R_4, B_1, B_2, B_3\}$ فإن كل حادث أولي له احتمال $\frac{1}{7}$ لكن إذا اخذنا مجموعة الإمكانيات $\{R, B\}$ واخترنا كرة عشوائيا فإن الحادثتين الأوليتين $\{R\}$ ، $\{B\}$ غير متساويتي الاحتمال لأن :
$P(R)=\frac{4}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{7}$.

- الحادث $\overline{A}$ هو مجموعة المخارج (الإمكانيات) التي تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A ويسمى بالحادث العكسي للحادث A ولدينا :
$P(A)+P(\overline{A})=1$ لأن $\overline{A}\cup A=\Omega$
- ليكن A و B حادثان كيفيان.
• الحادث $A\cap B$ (A و B) هو الحادث المشكل من مخارج تنتمي في نفس الوقت إلى A و B والذي يتحقق إذا تحقق A و B في نفس الوقت.
• الحادث $A\cup B$ (A أو B) هو الحادث المشكل من مخارج تنتمي على الأقل إلى واحدة من الحادثين A و B والذي يتحقق إذا تحقق على الأقل حادث واحد من الحادثين A و B
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
وإذا كان A و B حادثين غير متلائمين $(A\cap B=\phi)$ فإن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
وبشكل عام إذا كان A هو إتحاد حوادث A_1 ، A_2 ، ..... ، A_n غير متلائمة مثنى مثنى فإن : $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$ ويمكن اثبات ذلك بالتراجع.

1 - 2 المتغير العشوائي و قانون الاحتمال

لتكن $\Omega=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية التي نُعرف عليها احتمال.
حالما نرفق كل مخرج لتجربة عشوائية بعدد حقيقي نكون قد عرفنا متغير عشوائي على Ω والذي نرمز له بـ X ، Y أو Z ....
نقول أن المتغير العشوائي X هو دالة من Ω في $\mathbb{R}$.
نرمز بـ x_1 ، x_2 ، ...... ، x_q إلى قيم X حيث $n \rangle q$.
الحادث " X يأخذ القيمة x_i " يرمز له بـ $(X=x_i)$ واحتماله هو p'_i ونكتب $p'_i=P(X=x_i)$.
الحادث $(X=x_i)$ هو الحادث الذي يشمل كل المخارج التي صورها بـ X هي x_i
- مجموعة الثنائيات (x_i, p'_i) بالتعريف هي قانون احتمال للمتغير العشوائي X وبشكل عام نعرضه في جدول.

نقول عندئذ أننا عرفنا قانون احتمال للمتغير العشوائي X انطلاقا من الاحتمال المعرف على Ω .

مثال - ♦

نرمي حجر نرد متجانس مرقم من 1 إلى 6 ، نربح 10 دج إذا ظهر الرقم 1 ونربح 50 دج إذا ظهر الرقم 6 ،ونخسر 20 دج إذا ظهرت الأرقام الأخرى.
X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة الربح (أو الخسارة) المناسبة لها.
عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

✓ **الحل**

قيم المتغير العشوائي هي 10 ، 50 ، 20-
$p'_1=p(X=10)=\frac{1}{6}$ ، $p'_2=p(X=50)=\frac{1}{6}$
$p'_3=p(X=-20)=\frac{4}{6}$ فيكون لدينا الجدول المجاور

X	10	50	-20
p'_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1 - 3 الأمل الرياضي - التباين - الانحراف المعياري

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X نرمز له بـ $E(X)$ والمعرف بـ :
$$E(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i \times P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{k} x_i\, p'_i$$
- التباين للمتغير العشوائي X نرمز له بـ $V(X)$ والمعرف بـ :
$$V(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-E(X))^2\times p'_i \quad \text{او} \quad V(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i^2\, p'_i-E^2(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
- الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو $\sigma(X)$ حيث $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

تمرين تدريبي 1

E مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة من 10 إلى 30 ، نختار عشوائيا عددا من E ، ولنعتبر الحوادث A ، B ، C التالية :
A الحادث " العدد المختار مضاعف لـ 3"
B الحادث " العدد المختار مضاعف لـ 2"
C الحادث " العدد المختار مضاعف لـ 6"
- احسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$ ، $P(A\cap C)$ ، $P(A\cup C)$

✓ **الحل**

العبارة " نختار عشوائيا " تعني أننا موجودون في حالة تساوي الاحتمال.
عدد عناصر المجموعة E هو 21 عنصرا، إذن هناك 21 حادث أولي متساوي الاحتمال.
- توجد 7 أعداد من E مضاعفة للعدد 3 إذن عدد عناصر A هو 7
وبالتالي $P(A)=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$

- يوجد 11 عددا من E مضاعف للعدد 2 لأن $\left(\frac{30-10}{2}+1=11\right)$

إذن عدد عناصر B هو 11 وبالتالي $P(B)=\frac{11}{21}$

- يوجد 4 أعداد من E مضاعفة للعدد 6 وبالتالي عدد عناصر C هي 4

إذن $P(C)=\frac{4}{21}$

- الحادث $A\cap B$ هو "العدد المختار مضاعف لـ 2 ومضاعف لـ 3" أي مضاعف لـ 6

إذن $A\cap B=C$ وبالتالي $P(A\cap B)=P(C)=\frac{4}{21}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(C)=\frac{7}{21}+\frac{11}{21}-\frac{4}{21}=\frac{14}{21}$$

- بما أن C محتواة في A فإن $A\cap C=C$.

إذن $P(A\cap C)=P(C)=\frac{4}{21}$ و $P(A\cup C)=P(A)=\frac{7}{21}$.

تمرين تدريبي 2

كيس يحتوي على 5 كرات، ثلاث منها لونها أسود مرقمة بـ 1 ، 2 ، 3 وكرتان لونهما أبيض مرقمتان بـ 1 ، 2 نسحب عشوائيا كرتين في نفس الوقت من الكيس ونسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء.

أ) أعط مجموعة قيم X .

ب) حدد قانون احتمال X .

ج) احسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.

الحل

مجموعة الإمكانيات هي $\left\{\begin{matrix} N_2B_1 , & N_1B_2 , & N_1B_1 \\ N_3B_2 , & N_3B_1 , & N_2B_2 \\ N_2N_3 , & N_1N_3 , & N_1N_2 , B_1B_2 \end{matrix}\right\}$ عدد الإمكانيات هو 10.

أ) في كل السحبات نتحصل إما على كرتين لونهما أبيض أو كرة واحدة بيضاء أو لا نتحصل على أية كرة بيضاء و بالتالي مجموعة قيم X هي 0 ، 1 ، 2

ب) الحادث $(X=0)$ هو ظهور كرتين سوداويتين وعدد عناصر الحادث $(X=0)$ هو 3 .

إذن $P_1=P(X=0)=\frac{3}{10}$

- الحادث $(X=1)$ هو ظهور كرة بيضاء وكرة سوداء وعدد عناصر هذا الحادث هو 6 .

إذن $P_2=P(X=1)=\frac{6}{10}$

- الحادث $(X=2)$ هو ظهور كرتين بيضاويتين وعدد عناصر هذا الحادث هو 1 .

إذن $P_3=P(X=2)=\frac{1}{10}$

ومنه قانون احتمال X هو كما في الجدول المجاور:

X	0	1	2
P_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

ج) $E(X)=x_1\ p_1+x_2\ p_2+x_3\ p_3$

$=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{8}{10}$

$V(X)=x_1^2\ p_1+x_2^2\ p_2+x_3^2\ p_3-E^2(X)=0+\frac{6}{10}+4\times\frac{1}{10}-\frac{64}{100}$

$=\frac{60+40-64}{100}=\frac{36}{100}=0,36$

$\sigma(X)=\sqrt{0,36}=0,6$

2 - الاحتمالات الشرطية

مثال:

كيس يحتوي على 5 كرات، ثلاث منها سوداء و 2 حمراء.
نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع.

1) أ) لعد كل المخارج الممكنة ارسم شجرة الإمكانيات ولتكن A .

ب) ما هو احتمال الحادثة " نتحصل على كرة سوداء ثم سوداء أي " $N-N$

ج) احسب احتمال الحوادث التالية $N-R$ ، $R-N$ ، $R-R$.

2) على تفرعات الشجرة B في المستوى الأول كتبنا احتمالات سحب كرة حمراء (R) وكرة سوداء (N) في السحب الأول.

في المستوى الثاني كتبنا احتمالات سحب كرة حمراء (R) أو كرة سوداء (N) في السحب الثاني وهذا بأخذ بعين الاعتبار الاختيار الأول (الإمكانية الأولى) وهذه الاحتمالات شرطية.

أ) اعط معنى للعدد $\frac{3}{5}$ في المستوى الأول.

ثم $\frac{2}{4}$ في المستوى الثاني.

ب) اكمل الشجرة (B) بالاحتمالات المتبقية.

$\frac{3}{5}$ N — $\frac{2}{4}$ N $\frac{6}{20}$ ، R
$\frac{2}{5}$ R — N ، R

3) في السؤال الأول وجدنا $P(N-N)=\frac{6}{20}$ وهو جداء احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الأول واحتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني علما أننا سحبنا كرة سوداء في السحب الأول.

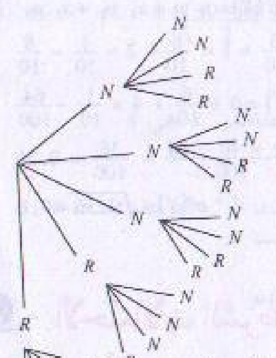
- تحقق أنه تطبق نفس العملية بالنسبة للحوادث الثلاثة التالية:

$R-R$ ، $R-N$ ، $N-R$

الحل

1) أ) في السحب الأول لدينا 3 إمكانيات لظهور N وإمكانيتين لظهور R

إذن لدينا 5 فروع للسحب الأول



كل فرع من الشجرة في السحب الأول يتفرع إلى أربعة فروع لأن في السحب الثاني لدينا 4 كرات فقط .

إذن عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين على التوالي بدون إرجاع الكرة إلى الكيس هي

$5 \times 4 = 20$

الحوادث المحصل عليها متساوية الاحتمال.

ب) عدد عناصر الحادث " $N-N$ " هو 6

ومنه $P(N-N)=\frac{6}{20}$

ج) عدد عناصر الحادث " $N-R$ " هو 6 ومنه $P(N-R)=\frac{6}{20}$

- عدد عناصر الحادث " $R-N$ " هو 6 ومنه $P(R-N)=\frac{6}{20}$

- عدد عناصر الحادث " $R-R$ " هو 2 ومنه $P(R-R)=\frac{2}{20}$

2) أ) - العدد $\frac{3}{5}$ هو احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الأول ونرمز لهذا الحادث بـ A

إذن $P(A)=\frac{3}{5}$

- العدد $\frac{2}{4}$ هو احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني علما أننا تحصلنا على كرة سوداء في السحب الأول.

إذا رمزنا بـ B إلى الحادث " الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني "

نسمي $P_A(B)$ احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني علما أننا تحصلنا على كرة سوداء في السحب الأول وعليه $P_A(B)=\frac{2}{4}$

- العدد $\frac{6}{20}$ هو احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الأول وكرة سوداء في السحب الثاني أي احتمال الحادث $(A \cap B)$

إذن $P(A \cap B)=\frac{6}{20}$

ب) لاحظ أن مجموع الاحتمالات المدونة على التفرعات التابعة من نفس العقدة يساوي 1

(قانون العقد) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

- الاحتمال الموجود في نهاية المسلك هو جداء الأعداد المكتوبة على الفروع المشكلة لهذا المسلك

فمثلا $P(A \cap B)=\frac{6}{20}$ ، $P_A(B)=\frac{2}{4}$ N ، $P(A)=\frac{3}{5}$ N

أي $\frac{6}{20}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$ $\quad P(A)\times P_A(B)=P(A\cap B)$

3) $P(N-R)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$

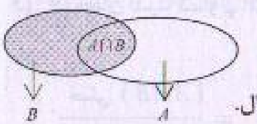
$P(R-N)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$

$P(R-R)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$.

◆ **تعريف**

نعتبر المجموعة Ω المعرف عليها الاحتمال P وليكن A و B حادثين من Ω حيث $P(A)\neq 0$. احتمال وقوع الحادث B علما ان الحادث A قد وقع هو العدد الذي نرمز له بـ $P_A(B)$ والمعرف بـ :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$



نسمي هذا النوع من الاحتمال بالشرطي وله جميع خواص الاحتمال.

ملاحظة

1) الاحتمال $P_A(B)$ يرمز له كذلك بـ $P(B/A)$

2) Ω مجموعة الإمكانيات و A و B حادثان غير خاليين.

لما يتحقق A فإن المخارج التي تحقق B هي المخارج المحتواة في $A\cap B$ وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق B علما أن A قد تحقق فهي إذن عدد عناصر $A\cap B$ والتي نرمز لها بـ أصلي $(A\cap B)$ وبما أن A محقق فإن مخارج A تلعب دور الحالات المكنة لـ B وليكن أصلي A هو عددها بافتراض تساوي الاحتمال نتحصل على :

$$P_A(B)=\frac{\text{أصلي }(A\cap B)}{\text{أصلي }(A)}=\frac{\dfrac{\text{أصلي }(A\cap B)}{\text{أصلي }\Omega}}{\dfrac{\text{أصلي }(A)}{\text{أصلي }(\Omega)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

◆ **خواص**

1) من اجل كل حادث B لدينا $0 \leq P_A(B) \leq 1$

2) $P_A(B)+P_A(\overline{B})=1$

3) في حالة تساوي الاحتمال :

$$P_A(B)=\frac{\text{عدد المخارج الملائمة لـ } A\cap B}{\text{عدد المخارج الملائمة لـ } A}$$

4) $P(A\cap B)$ يحسب بطريقتين :

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$ مع $P(B)\times P(A)\neq 0$

♦ الإثبات

1) $A\cap B$ هي مجموعة جزئية من A إذن $0 \le P(A\cap B) \le P(A)$

ومنه $0 \le \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \le 1$ أي $0 \le P_A(B) \le 1$

2) $P_A(B)+P_A(\overline{B})=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}+\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})}{P(A)}$

لكن $A=(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})$ و $A\cap B$ و $A\cap \overline{B}$ حادثين غير متلائمين.

إذن $P((A\cap B)\cup(A\cap \overline{B}))=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})=P(A)$

وبالتالي $P_A(B)+P_A(\overline{B})=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

3) إذا كان لدينا تساوي الاحتمال فإن:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{\text{اصلي}(A\cap B)}{\text{اصلي}\ \Omega}}{\frac{\text{اصلي}(A)}{\text{اصلي}(\Omega)}}=\frac{\text{اصلي}(A\cap B)}{\text{اصلي}\ A}$$

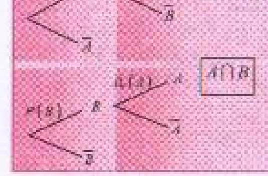
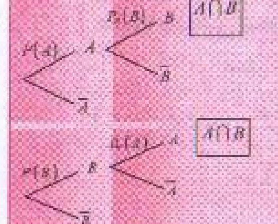
4) $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ .... (1)

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ .... (2)

من (1) و (2) نتحصل على $P(A\cap B)=P_A(B)\times P(A)=P_B(A)\times P(B)$

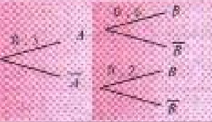
ملاحظة

- تسمح لنا المساواة $P_A(B)\times P(A)=P_B(A)\times P(B)$ بحساب احد اربعة أعداد بمعرفة ثلاثة منها.
- نعتبر على شجرة الاحتمالات مستويين من الفروع، الأول يشير إلى احتمال الحادث A والثاني يسمح لنا بإظهار الاحتمال الشرطي $P_A(B)$، و على شجرة احتمالات أخرى نستطيع البدء بـ B ثم $P_B(A)$.

تمرين تدريبي ❶

1) اكمل الاحتمالات الناقصة على الشجرة المقابلة.
2) احسب $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap \overline{B})$ ، $P(\overline{A}\cap B)$



✓ الحل

1) من الشجرة نجد $P(A)=0,3$ و $P_A(B)=0,6$

لإتمام الشجرة نستعمل الدستور $P(\overline{A})=1-P(A)$

إذن $P(\overline{A})=1-P(A)=0,7$

وباستعمال قانون العقد نجد $P_A(\overline{B})=0,4$ و $P_{\overline{A}}(\overline{B})=0,8$

(شجرة: $0,3$ → A : $0,6$ → B ، $0,4$ → $\overline{B}$ ؛ $0,7$ → $\overline{A}$: $0,2$ → B ، $0,8$ → $\overline{B}$)

2) $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=0,3\times 0,6=0,18$

$P(A\cap \overline{B})=P(A)\times P_A(\overline{B})=0,3\times 0,4=0,12$

$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=0,7\times 0,2=0,14$

تمرين تدريبي ❷

كيس يحتوي على 20 كرة منها 15 بيضاء (b) و 5 سوداء (n)، نسحب على التوالي كرتين بدون إرجاع الكرة الأولى إلى الكيس.

احسب احتمال الحوادث التالية :

E " الكرتين بيضاويتين"

F " الكرة الأولى سوداء والكرة الثانية بيضاء"

G " الحصول على اللونين"

H " الكرتين سوداويتين"

✓ الحل

ليكن A الحادث " الكرة الأولى بيضاء" و B الحادث " الكرة الثانية بيضاء".

(شجرة: السحب الأول: $P(A)=\frac{15}{20}$ → b : $P_A(B)=\frac{14}{19}$ → b [E] ، $P_A(\overline{B})=\frac{5}{19}$ → n ؛ $P(\overline{A})=\frac{5}{20}$ → n : $P_{\overline{A}}(B)=\frac{15}{19}$ → b [F] ، $P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{4}{19}$ → n [H] — السحب الثاني)

- الحادث E هو $A\cap B$

إذن $P(E)=P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$

$=\frac{15}{20}\times\frac{14}{19}=\frac{42}{76}$

- الحادث F هو $\overline{A}\cap B$

إذن $P(F)=P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$

$=\frac{5}{20}\times\frac{15}{19}=\frac{15}{76}$

- الحادث G هو $(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

لكن $\overline{A}\cap B=F$

إذن $P(G)=P(F)+P(A\cap \overline{B})$

لأن الحادثين $A\cap \overline{B}$ و F غير متلائمين.

$P(G)=\frac{15}{76}+P(A)\times P_A(\overline{B})$

$=\frac{15}{76}+\frac{15}{20}\times\frac{5}{19}=\frac{15}{76}+\frac{15}{76}=\frac{30}{76}$

- الحادث H هو $\overline{A}\cap \overline{B}$

$P(H)=P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{5}{20}\times\frac{4}{19}=\frac{1}{19}$

❸ - دستور الاحتمالات الكلية – شجرة الاحتمالات

3 - 1 دستور الاحتمالات الكلية

مبرهنة ❶

A حادث و $\overline{A}$ حادثه العكسي و D حادث كيفي إذن :

$$P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(D)$$

◆ الإثبات

D هو اتحاد الحادثين الغير متلائمين $D\cap A$ و $D\cap\overline{A}$

اي $D=(D\cap A)\cup(D\cap\overline{A})$

$$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap\overline{A})$$
$$=P(A)\times P_A(D)+P_{\overline{A}}(D)\times P(\overline{A})$$

تسمى العلاقة $P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(D)$ بدستور الاحتمالات الكلية.

مبرهنة ❷ (تعميم)

إذا كانت A، B، C ثلاثة حوادث تشكل تجزئة لمجموعة الإمكانيات Ω (حوادث غير متلائمة) و D حادث كيفي من Ω فإن دستور الاحتمالات الكلية هو :

$$P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$$

الإثبات

بما أن الحوادث A، B، C تشكل تجزئة لـ Ω فإن الحوادث $D\cap A$ و $D\cap B$ و $D\cap C$ غير متلائمة واتحادها يساوي D

إذن $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$

$$=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$$

ملاحظة

نستطيع تعميم المبرهنة (2) إلى أكثر من ثلاثة حوادث بحيث أنها تشكل تجزئة للمجموعة Ω

إذا كانت الحوادث $C_1, C_2, ..., C_n$ تشكل تجزئة لـ Ω (أحداث غير متلائمة مثنى مثنى) فإنه من أجل كل حادث كيفي A لدينا :

$$P(A)=P(A\cap C_1)+P(A\cap C_2)+...+P(A\cap C_n)$$

وبما أنه من أجل كل i لدينا $P(A\cap C_i)=P(C_i)\times P_{C_i}(A)$

فإن $P(A)=P(C_1)\times P_{C_1}(A)+P(C_2)\times P_{C_2}(A)+...+P(C_n)\times P_{C_n}(A)$

3 - 2 شجرة الاحتمالات

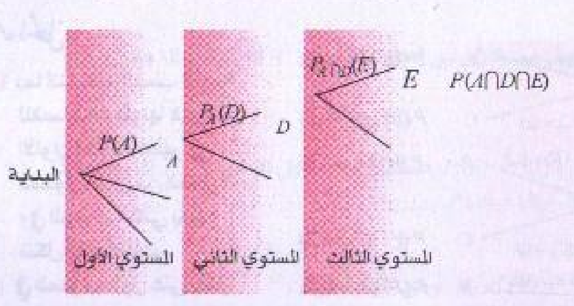
كل تجربة عشوائية نستطيع وصفها بواسطة شجرة الاحتمالات التي تتكون من عقد وفروع نابعة من هذه العقد. وكل عقدة من هذه الشجرة توافق حالة لهذه التجربة وانطلاقا من كل حالة من هذه الحالات نعرف قيمة احتمال الحالة الموالية لها.

على الفرع النابع من البداية ●—— A نكتب $P(A)$

وعلى الفرع AD النابع من A (●—— A ●—— D) نكتب $P_A(D)$ ،

وعلى الفرع DE النابع من D (●—— A ●—— D ●—— E) نكتب $P_{A\cap D}(E)$ وفي نهاية كل مسلك نكتب احتمال تقاطع الحوادث المكتوبة على الفروع المشكلة لهذا المسلك ؛

$P(A\cap D\cap E)$ ●—— A ●—— D ●—— E وبهذه الكيفية نكمل إنشاء الشجرة.



مسلك كامل من البداية إلى نهاية الشجرة يمثل تقاطع كل الحوادث التي نصادفها على هذا المسلك ، نطابق بين المسلك والحادث الذي يمثله. على شجرة الاحتمالات نطبق القواعد التالية :

- احتمال مسلك هو جداء الاحتمالات المكتوبة على كل فرع من هذا المسلك.
- احتمال حادث كيفي E هو مجموع احتمالات المسالك التي تقودنا إلى E .
- مجموع الاحتمالات المكتوبة على الفروع النابعة من نفس العقدة يساوي 1 (قانون العقد).

◆ مثال -

A، B، C ثلاثة حوادث غير متلائمة مثنى مثنى مشكلة تجزئة لـ Ω و D حادث كيفي من Ω

مجموع الاحتمالات المدونة على الفروع النابعة من نفس العقدة يساوي 1 وعليه $P(A)+P(B)+P(C)$

- احتمال الحادث الذي يوافق المسلك ●—— A ●—— D $(A\cap D)$ هو $P(A\cap D)=P(A)\times p_A(D)$
- احتمال الحادث D هو مجموع احتمالات المسالك التي تقودنا إلى D وعليه :

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$$

تمرين تدريبي 1

كيس يحتوي على قصاصات بثلاثة الوان ، نصفها أبيض (B) و $\frac{3}{10}$ منها أخضر (V) وخمسها أصفر (J) ، ولتكن50% من القصاصات البيضاء دائرية الشكل (R)، 20 % من القصاصات الخضراء دائرية الشكل و 60 % من الصفراء دائرية الشكل كذلك، أما البقية فهي مربعة الشكل (C).
نسحب عشوائيا قصاصة من الكيس.
1) مثل بواسطة شجرة الاحتمالات كل الاحتمالات التي تصادفها على الشجرة.
2) ما هو احتمال أن تكون القصاصة دائرية الشكل ؟
3) إذا علمت أنها دائرية الشكل فما هو احتمال أن تكون بيضاء؟ خضراء؟ صفراء؟

الحل

1) بما أننا نعلم النسب المئوية للقصاصات بلونها فإن الألوان الثلاثة تظهر في المستوى الأول من الشجرة. وفي المستوى الثاني يظهر شكل القصاصات. في المستوى الأول على كل فرع نكتب النسب المئوية التي تترجم احتمال سحب كل لون وفي المستوى الثاني نظهر الاحتمالات الشرطية المعطاة بنسب القصاصات الدائرية أو المربعة لكل لون وعليه إذا رمزنا بـ R إلى الحادث " سحب قصاصة دائرية "، فإننا نكتب $R_B(R)=0,5$ على الفرع BR .

المستوى الأول: اللون		المستوى الثاني: الشكل		
$P(B)=0,5$	B	$P_B(R)=0,5$	R	$P(B\cap R)=0,25$
		$P_B(C)=0,5$	C	$P(B\cap C)=0,25$
$P(V)=0,3$	V	$P_V(R)=0,2$	R	$P(V\cap R)=0,06$
		$P_V(C)=0,8$	C	$P(V\cap C)=0,24$
$P(J)=0,2$	J	$P_J(R)=0,6$	R	$P(J\cap R)=0,12$
		$P_J(C)=0,4$	C	$P(J\cap C)=0,08$

2) لدينا $R=(R\cap B)\cup(R\cap V)\cup(R\cap J)$
الحوادث $R\cap J$ ، $R\cap V$ و $R\cap B$ غير متلائمة
إذن $P(R)$ هو مجموع الاحتمالات الثلاثة.
وحسب دستور الاحتمالات الكلية نجد :
$$P(R)=P(B)\times P_B(R)+P(V)\times P_V(R)+P(J)\times P_J(R)$$
$$=0,25+0,06+0,12=0,43$$

3) ـ احتمال أن تكون القصاصة بيضاء علما أنها دائرية هو $P_R(B)$ حيث :
$$P_R(B)=\frac{P(R\cap B)}{P(R)}=\frac{0,25}{0,43}=\frac{25}{43}$$
ـ احتمال أن تكون القصاصة خضراء علما أنها دائرية هو $P_R(V)$ حيث :
$$P_R(V)=\frac{P(R\cap V)}{P(R)}=\frac{0,06}{0,43}=\frac{6}{43}$$

ـ احتمال أن تكون القصاصة صفراء علما أنها دائرية هو $P_R(J)$ حيث :
$$P_R(J)=\frac{P(R\cap J)}{P(R)}=\frac{0,12}{0,43}=\frac{12}{43}$$
بطريقة أخرى نجد :
$$P_R(J)=1-(P_R(B)+P_R(V))=1-(\frac{25}{43}+\frac{6}{43})=1-\frac{31}{43}=\frac{12}{43}$$

4 - الاستقلالية في الاحتمالات

4 - 1 الأحداث المستقلة

◆ تعريف
نقول عن حادثين A و B أنهما مستقلان من أجل الاحتمال P إذا وفقط إذا كان
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

◆ خاصية
الحادثان A و B بحيث $P(B)\times P(A)\neq 0$ مستقلان من أجل الاحتمال P إذا وفقط إذا كان $P(B)=P_A(B)$ أو $P(A)=P_B(A)$

◆ الإثبات
لدينا من جهة $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ومن جهة أخرى :
$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ و $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$
إذن نستنتج $P(A)\times P(B)=P(A)\times P_A(B)$ و $P(A)\times P(B)=P(B)\times P_B(A)$
ومنه ينتج $P(B)=P_A(B)$ و $P(A)=P_B(A)$

ملاحظة
1) كل حادثين غير خاليين وغير متلائمين فإنهما غير مستقلين.
2) - المساواة $P(A)=P_B(A)$ تعني أن تحقق الحادث A غير مرتبط بتحقق الحادث B
- المساواة $P(B)=P_A(B)$ تعني أن تحقق الحادث B غير مرتبط بتحقق الحادث A
3) رأينا في إنشاء شجرة الإمكانيات والاحتمالات أنه من أجل فرع نابع عن عقدة غير ابتدائية مثلا C ——● B كتبنا $P_X(C)$ حيث X هو الحادث الناتج من تقاطع كل الحوادث الموجودة على هذا المسلك من البداية إلى B .
وفي حالة الاستقلالية يكفي أن نكتب $P(C)$.

4 - 2 التجارب العشوائية المستقلة

◆ تعريف
لتكن E_1 و E_2 تجربتين عشوائيتين، مجموعتي مخارجهما Ω_1 ، Ω_2 على الترتيب. نقول عن E_1 و E_2 أنهما مستقلتين إذا كان كل حادث من مستقل عن كل حادث من E_2 ;

◆ **خاصية**

E تجربة عشوائية تتضمن عدد منته من الاختبارات و S حادث مرتبط بالتجربة E .
إذا كررنا n مرة هذه التجربة E بنفس الطريقة و في نفس الشروط و إذا كانت التجارب E_1 ، E_2 ، ... ، E_n مستقلة فإن احتمال الحادث $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap ... \cap S_n$ يساوي

$$\underbrace{P(S) \times P(S) \times \; .... \; \times P(S)}_{n \text{ مرة}} \quad \text{أي} \quad (P(S))^n$$

مثال - 1

E هي التجربة « رمي حجر النرد » و S الحادث « الحصول على رقم فردي »
إذن $P(S) = \frac{3}{6} = 0.5$.
احتمال الحصول 4 مرات على عدد فردي في الرميات الأربعة المتتالية لنفس الحجر يساوي $(P(S))^4$ اي $(0.5)^4$

مثال - 2

U_1 كيس يحتوي على حروف كلمة $HOUDA$ و U_2 كيس اخر يحتوي على كلمة $BASET$ و U_3 كيس ثالث حروفه ALI .
نسحب عشوائيا حرفا من U_1 ثم حرفا من U_2 ثم حرفا من U_3 وتسجل الحروف المحصل عليها حسب ترتيب السحب ، تقبل أن اختيار حرف من كيس مستقل عن كل الاختيارات التي سبقت.
- احسب احتمال الحادث « نتحصل على ABA ».

✓ الحل

نبدا بإنشاء الشجرة الموافقة لهذه التجربة ؛
الفرع A ——● مثلا هو الحادث « سحب الحرف A من U_1 »
ابتدءا من العقدة A هناك خمسة مخارج ممكنة ، نفس الشيء بالنسبة إلى العقد H ، O ، U ، D .
ابتداء من الحرف B هناك ثلاثة مخارج ممكنة والتي تمثل الحروف الموجودة في الكيس U_3 .
نفس الشيء بالنسبة إلى الحروف A ، S ، E ، T .

على الفرع B ——● A نسجل احتمال الحادث « سحب B من U_2 علما اننا سحبنا A من U_1 »
لكن حسب الفرض هذا الحادث مستقل عن A .
إذن احتماله هو احتمال الحادث « سحب B من U_2 » والذي يساوي $\frac{1}{5}$.
هذا الطرح يبقى صحيحا بالنسبة إلى كل الفروع الأخرى .

لحساب احتمال الحادث « ABA » ليس من الضروري إنشاء كل الشجرة.
الحادث « ABA » نتحصل عليه بالمسلك الوحيد ؛

$$P(A \cap B \cap A) \quad A \xrightarrow{\frac{1}{3}} \bullet \; B \xrightarrow{\frac{1}{5}} \bullet \; A \xrightarrow{\frac{1}{5}} \bullet$$

إذن حسب قاعدة حساب احتمال مسلك

فإن $P(ABA) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{75}$

نستطيع اعتبار هذه التجربة بمثابة تتالي ثلاث تجارب ،
الأولى سحب حرف من U_1
والثانية سحب حرف من U_2
والثالثة سحب حرف من U_3 ،
لقد فرضنا أن هذه التجارب مستقلة اي أن مخارج كل منها غير مرتبطة بكل السحابات التي سبقتها.
المخرج (e_1 , e_2 , e_3) في التجربة الكلية هو قائمة مكونة من مخارج التجارب المستقلة.
في هذه الشروط يكون لدينا
$P(e_1 , e_2 , e_3) = P_1(e_1) \times P_2(e_2) \times P_3(e_3)$
حيث: P_i يرمز إلى قانون احتمال التجربة ذات الرتبة i

الكيس U_1: A ، D ، U ، O ، H — الكيس U_2: B ، A ، S ، E ، T — الكيس U_3: A ، L ، I



ملاحظة

نعلم أن دراسة تجربة عشوائية أنجزت فعليا تسري وفق نموذج نظري أنشئ مسبقا.
الاستقلالية بين بعض الحوادث هو فرض نموذج نابع من تحليل التجربة.
التجربة أعطت ان هذا الفرض يكون جليا في بعض التجارب المرجعية مثل :
- رمي عدة أحجار نرد أو قطعة نقدية.
- سحب بدون شرط من أكياس مختلفة .
- الرمي المتوالي لنفس القطعة النقدية.
- سحب بالإرجاع من نفس الكيس.
- رمي حجر النرد n مرة متتالية.

تمرين تدريبي 1

لتكن a ، b ، c ثلاث قطع نقدية. القطعة a متزنة والأخرتين متشابهتين ومزيفتين نرمز بالصفر إذا ظهر الظهر P وبالواحد إذا ظهر الوجه (F).
بالنسبة إلى القطعة a لدينا $P(0) = P(1) = 0.5$.
بالنسبة إلى القطعتين الأخرتين لدينا $P(0) = 0.7$ و $P(1) = 0.3$
نرمي القطع الثلاثة المعطاة ونأخذ كمخرج الثلاثيات (e, f, g) حيث e ، f ، g تمثل على التوالي الأوجه الظاهرة للقطع a ، b ، c .
تقبل ان نتيجة كل قطعة مستقلة عن نتائج القطعتين الأخرتين.
ما هو احتمال الحادث " التحصل مرتين فقط على الظهر P " ؟

✓ الحل

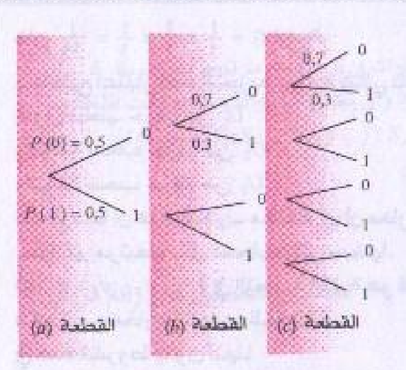
نبدا بإنشاء شجرة الاحتمالات.
يظهر جليا ان ثلاثة مسالك فقط التي تحقق الحادث " التحصل مرتين فقط على الظهر P " و هي ؛



$1 —— 0 —— 0 ——$

$0 —— 1 —— 0 ——$

$0 —— 0 —— 1 ——$



لنكتب على الأولى احتمالاتها

$1 \xrightarrow{0,7} 0 \xrightarrow{0,7} 0 \xrightarrow{0,5}$

لأن الحادث ظهور الصفر للقطعة (b) مستقل عن الحادث " ظهور الصفر في القطعة a "

إذن حسب قاعدة احتمال مسلك فإن

$P(0,0,1) = 0,5 \times 0,7 \times 0,7 = 0,245$.

بنفس الطريقة نجد : $P(0,1,0) = 0,5 \times 0,3 \times 0,7 = 0,105$ و $P(1,0,0) = 0,5 \times 0,7 \times 0,7 = 0,245$

إذا رمزنا بـ B إلى الحادث "الحصول على الظهر مرتين" فإن :

$$P(B) = P(0,0,1) + P(0,1,0) + P(1,0,0)$$
$$= 0,245 + 0,105 + 0,245 = 0,595$$

تمرين تدريبي ❷

نعتبر سيارة من نوع كليو (CLIO 97) ليست في حالة جيدة ولنعتبر الحادثين :

A « السيارة لها عطب في المحرك » و B « السيارة لها عطب في العجلة »

لدينا $P(A) = 0,07$ و $P(B) = 0,15$

1) هل الحادثان A و B مستقلان ؟

2) ما هو احتمال أن تكون السيارة قابلة للسير ؟

✓الحل

$P(A)=0,07$	A	0,15	B	$A \cap B$
		0,85	$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$
0,93	$\overline{A}$	0,15	B	$\overline{A} \cap B$
		0,85	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

1) من النص نفهم أن الحادثين A و B مستقلين لأن العطب في المحرك ليست له علاقة بالعطب في العجلة.

2) الحادث « السيارة قابلة للسير » هو $\overline{A} \cap \overline{B}$ واحتماله هو جداء الاحتمالات الموجودة على المسلك $\overline{B} \xleftarrow{0,85} \overline{A} \xleftarrow{0,93}$

أي $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,93 \times 0,85 = 0,7905$

طريقة ثانية

الحادث « السيارة قابلة للسير » هو الحادث العكسي للحادث « السيارة لها أحد العطبين » أي الحادث العكسي للحادث $A \cup B$.

لكن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

إذن $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = 0,7905$

❺ - استقلالية متغيرين عشوائيين

- قانون احتمال لمتغيرين عشوائيين :

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على مجموعة إمكانيات لتجربة عشوائية حيث :

X يأخذ القيم x_1 ، x_2 ، .... ، x_n و Y يأخذ القيم y_1 ، y_2 ، ..... ، y_n

تعريف قانون الثنائية (X, Y) هو إعطاء الاحتمال $P_{(i,j)}$ لكل حادث $[(X = x_i)$ و $(Y = y_j)]$

حيث $0 \le i \le n$ و $0 \le j \le n$.

وبشكل عام يعطى قانون (X, Y) في جدول.

- استقلالية X و Y :

القول أن X و Y مستقلان يعني أنه من أجل كل عددين طبيعيين i و j يكون الحادثان $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ مستقلين.

ملاحظة

1) إذا كان $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ مستقلان فإن :

$P[(X = x_i) \cap (Y = y_j)] = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$

وبالتالي $(P_{i,j}) = P_i \times P'_j$ من أجل كل طبيعيين i و j.

2) الجداء $P_i \times P'_j \neq 0$ مهما كان i و j

وعليه إذا كان $(P_{i,j}) = 0$ من أجل ثنائية معينة فإنه لا توجد استقلالية.

3) إذا كان Z متغير عشوائي بحيث $Z = X + Y$

فإنه مهما كان X و Y مستقلين أم لا يكون لدينا $E(Z) = E(X) + E(Y)$

لكن إذا كان X و Y غير مستقلين فإن $V(Z) \neq V(X) + V(Y)$

تمرين تدريبي

تجربة عشوائية تتمثل في رمي حجري نرد متزنين. و ليكن X المتغير العشوائي قيمه تمثل مجموع الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي

و Y متغير عشوائي قيمه عبارة عن جداء الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي.

- احسب $P(X = 4)$ ، $P(Y = 5)$

ثم $P([(X = 4) \cap (Y = 5)])$.

هل X و Y مستقلان؟

✓الحل

1) $P(X = 4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{3}{36}$

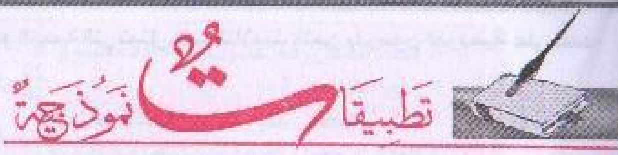
$$P(Y=5) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{2}{36}$$

الحادث $(Y=5) \cap (X=4)$ لا يتحقق أبدا

إذن فاحتماله هو الصفر

لكن $P(X=4) \times P(Y=5) = 6 \times (36)^{-2}$

إذن فهذان المتغيران غير مستقلين أي مرتبطين.

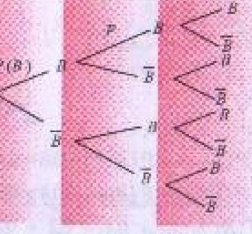


تطبيق 1 حساب احتمال حادث

كيس يحتوي على 10 كرات منها 6 بيضاء، نسحب 3 من هذا الكيس.
(المخرج هو عبارة عن مجموعة من ثلاث كرات).
احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء.

الحل

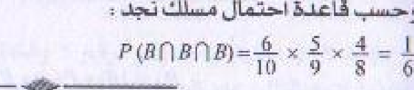
نسمي B الحادث « سحب كرة بيضاء » و $\overline{B}$ حادثه العكسي
يمكن اعتبار هذا السحب كتعاقب ثلاث سحبات متتالية لكرة من الكيس بدون إرجاع
وللحصول على ثلاث كرات بيضاء



يجب إتباع المسلك $\bullet \xrightarrow{\frac{6}{10}} B \bullet \xrightarrow{\frac{5}{9}} B \bullet \xrightarrow{\frac{4}{8}} B$

هناك مسلك واحد يحقق هذا السحب
(ثلاث كرات بيضاء)
وحسب قاعدة احتمال مسلك نجد :

$$P(B \cap B \cap B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$



تطبيق 2 التعرف على استقلالية حادثين

قسم يتكون من 40 تلميذا منهم 25 بنتا و 15 ذكرا.
15 بنتا تدرس الفرنسية و 5 ذكور يدرسون الفرنسية، نختار عشوائيا تلميذا واحدا من القسم ولنعتبر الحادثين A و B المعرفين كما يلي :
A « التلميذ يكون بنتا »
B « التلميذ يدرس الفرنسية »
أ) احسب $P(A)$ و $P(B)$.
ب) هل الحادثان A و B مستقلان ؟

الحل

أ) احتمال الحادث A هو النسبة التي تمثل عدد البنات على عدد عناصر القسم وتساوي $\frac{25}{40}$.

إذن $P(A) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

. احتمال الحادث B هو النسبة التي تمثل عدد التلاميذ الذين يدرسون الفرنسية على عدد.
عناصر القسم وتساوي $\frac{20}{40}$

إذن $P(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

$A \cap B$ الحادث « التلميذ بنت تدرس الفرنسية » واحتماله هو النسبة التي تمثل عدد البنات اللاتي يدرسن الفرنسية على عدد عناصر القسم وتساوي $\frac{15}{40}$

إذن $P(A \cap B) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

بما أن $P(A) \times P(B) = \frac{5}{16}$ و $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$ فإن A و B حادثان غير مستقلين.

ب) حتى يكون الحادثان A و B مستقلين يجب أن يكون $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

تطبيق 3

حساب احتمال حوادث

A و B حادثان بحيث $P(A) = 0,6$ ، $P(B) = 0,4$ ، $P(A \cap B) = 0,2$
احسب $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{B})$ ، $P(A \cup B)$ ، $P(\overline{A} \cup B)$ ، $P(\overline{A} \cap B)$ ، $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

✓ الحل

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,4 - 0,2 = 0,8$

. الحادثان $A \cap B$ و $\overline{A} \cap B$ غير متلائمين و $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

ومنه $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ وعليه $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

إذن $P(\overline{A} \cap B) = 0,4 - 0,2 = 0,2$

$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 0,4 + 0,4 - 0,2 = 0,6$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$

تطبيق 4

حساب احتمال حوادث

نرمي ثلاثة أحجار نرد ألوانها أحمر (R) و أبيض (B) وأخضر (V).
نشكل عندئذ عددا من ثلاثة أرقام.
رقم المئات هو الرقم الظاهر على (R) ورقم العشرات هو الرقم الظاهر على (B) ورقم الوحدات هو الرقم الظاهر على (V).
1) ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها ؟
2) احسب احتمال الأحداث التالية :

A « العدد المشكل رقم عشراته و آحاده متساوي »
B « رقم المئات هو 5 »
C « العدد المتحصل عليه هو مربع لعدد طبيعي »
D « العدد المتحصل عليه أكبر تماما من 324 »
E « العدد المتحصل عليه أرقامه مختلفة مثنى مثنى »

✓ الحل

1) نستعمل طريقة ملء الخانات لتعيين عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها.
نملأ كل من الثلاث خانات V ، B ، R بحيث :
الخانة R لها 6 مخارج والخانة B لها 6 مخارج و V لها 6 مخارج أيضا.

6 اختيارات	6 اختيارات	6 اختيارات
الخانة V	الخانة B	الخانة R

إذن هناك $6 \times 6 \times 6$ عددا يمكن تشكيله من هذه الرمية.

2) . لتعيين عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث A نستعمل ملء الخانات الثلاث V ، B ، R.
الخانة R لها 6 اختيارات والخانة B لها 6 اختيارات و V لها اختيار واحد
وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هي $6 \times 6 \times 1$ أي 36

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{36}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

. الخانة R لها اختيار واحد وهو الرقم 5 والخانة B لها 6 اختيارات والخانة V لها 6 اختيارات وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث B هي $1 \times 6 \times 6 = 36$

إذن $P(B) = \frac{36}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$

. نفرض أن العدد المشكل هو rbv
rbv مربع لعدد طبيعي يعني $rbv = a^2$
$rbv = a^2$ يكافئ $a = \sqrt{rbv}$ لكن العدد rbv محصور بين 111 و 666
وعليه $a \in \{11, 12, ..., 25\}$
من أجل الأعداد a التي رقم آحادها 3 أو 7 نتحصل على أعداد rbv أحد أرقامها أكبر من 6 وبالتالي فهي مرفوضة.
إذن عدد القيم الممكنة لـ a هي 12 وكل قيمة لـ a يقابلها عدد rbv
وبالتالي عدد الأعداد rbv التي هي مربع لعدد طبيعي هو 12.

إذن احتمال الحادث C هو $P(C) = \frac{12}{6 \times 6 \times 6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

. حتى يكون العدد المتحصل عليه أكبر من 324 يجب أن نختار رقم المئات من المجموعة $\{3, 4, 5, 6\}$ ورقم العشرات من $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ ورقم الوحدات من $\{6, 5\}$
إذن عدد الحالات الممكنة هو $4 \times 5 \times 2 = 40$

V	B	R
2 اختيارات	5 اختيارات	4 اختيارات

و بالتالي $P(D)=\frac{40}{6\times6\times6}=\frac{5}{27}$

- حتى تكون أرقام العدد المتحصل عليه مختلفة مثنى مثنى يجب أن يكون لرقم المئات 6 اختيارات ورقم العشرات 5 اختيارات ورقم الوحدات 4 اختيارات

وبالتالي عدد الحالات الملائمة هي $6\times5\times4$ إذن $P(E)=\frac{6\times5\times4}{6\times6\times6}=\frac{5}{9}$

تطبيق 5 احتمال فتح باب خزينة مزود بنظام

باب خزينة بنك مزود بنظام الحماية مفتاحه مشكل من رقمين مختلفين مختارين من المجموعة $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ وحرفين سواء كانا مختلفين أم من نفس الحرف من المجموعة $F=\{a,b,c\}$

ما هو احتمال أن شخصا يعلم هذا التدوين أن يفتح الباب للوهلة الأولى في كل حالة من الحالات التالية :

أ) لا يعلم المفتاح ، ب) يعلم فقط أن الرقمين فرديين.

جـ) يعلم فقط أن الحرفين غير متشابهين ، د) يعلم الحرفين بالضبط.

الحل

المفتاح يكون من الشكل $xy\alpha\beta$ حيث x , y عنصرين مختلفين من E و α , β حرفين مختلفين أم لا من F .

أ) A حادث « الشخص يفتح الباب للوهلة الأولى بدون علم المفتاح »

عدد الحالات الممكنة لتشكيل هذا المفتاح هي $8\times7\times3\times3=336$

β	α	y	x
3 اختيارات	3 اختيارات	7 اختيارات	8 اختيارات

عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هي 1 لأنه يوجد مفتاح واحد يفتح الخزينة

إذن $P(A)=\frac{1}{336}=0{,}0029$

ب)

β	α	y	x
3 اختيارات	3 اختيارات	2 اختيارات	3 اختيارات

B هو الحادث « الشخص يفتح الخزينة للوهلة الأولى علما أنه يعلم أن الرقمين فرديين »

عدد الحالات الممكنة لـ B هي $3\times2\times3\times3=54$

وبالتالي $P(B)=\frac{1}{54}=0{,}018$

جـ) الحادث C « الشخص يفتح الخزينة للوهلة الأولى علما أنه يعلم أن الحرفين غير متشابهين »

عدد الحالات الممكنة لـ C هي $6\times5\times3\times2=180$

β	α	y	x
2 اختيارات	3 اختيارات	5 اختيارات	6 اختيارات

إذن $P(C)=\frac{1}{6\times5\times6}=\frac{1}{180}$

د) الحادث D « الشخص يفتح الخزينة للوهلة الأولى علما أنه يعلم الحرفين بالضبط »

إذن يبقى له أن يختار الرقمين المختلفين من E .

وعدد الحالات الممكنة هي $6\times5=30$

إذن $P(D)=\frac{1}{30}=0{,}033$

تطبيق 6 توقع احتمال حادث

أربعة أصدقاء توجهوا إلى مبنى به أربع قاعات سينما كل واحد يختار عشوائيا فيلما وباستقلالية عن الآخرين ، نهتم بتوزيعهم على هذه القاعات، ونفرض أن كل التوزيعات متساوية الاحتمال.

احسب احتمال الأحداث التالية :

A « كل واحد منهم موجود في قاعة »

B « على الأقل اثنين موجودين في نفس القاعة »

C « كلهم في نفس قاعة ».

الحل

نرمز إلى الأشخاص بـ a ، b ، c ، d.

لتعيين عدد الحالات الممكنة نتبع طريقة ملء الخانات حيث كل خانة تمثل شخص.

d	c	b	a
4 اختيارات	4 اختيارات	4 اختيارات	4 اختيارات

كل شخص له أربعة اختيارات.

إذن عدد الحالات الممكنة هي $4\times4\times4\times4=4^4$

أ) لكي يكون كل شخص في قاعة يجب أن يكون للشخص a أربع اختيارات و b له 3 اختيارات و c له اختيارين و d له اختيار واحد.

وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هي $4\times3\times2\times1$ أي 24 .

إذن $P(A)=\frac{24}{256}=0{,}093$

ب) على الأقل شخصين موجودين في نفس القاعة تعني أنه إما 2 أو 3 أو 4 موجودين في نفس القاعة

- إذا كان شخصين في نفس القاعة فإن الشخصين الآخرين كل منهما له 3 اختيارات

وبالتالي عدد الحالات الملائمة في هذه الحالة هي $9 = 3 \times 3$

- إذا كان ثلاث أشخاص في نفس القاعة فإن الشخص الرابع له 3 اختيارات.
- إذا كان 4 أشخاص في نفس القاعة فإنه توجد حالة واحدة.

وعليه فإن عدد الحالات الملائمة الكلية هي $9 + 3 + 1 = 13$

إذن $P(B) = \frac{13}{256} = 0{,}05$

جـ) عدد الحالات الملائمة للحادث c هي 4 ومنه $P(C) = \frac{4}{256}$

تطبيق 7 توقع احتمال سحب كريات ملونة وتحديد التركيبة

كيس يحتوي على كرات بيضاء وحمراء وسوداء نسحب عشوائيا كرة من الكيس ونفرض أن كل السحبات متساوية الاحتمال.

$P_1 = \frac{1}{4}$ هو احتمال سحب كرة سوداء و $P_2 = \frac{1}{3}$ هو احتمال سحب كرة حمراء

1) ما هو احتمال سحب كرة بيضاء ؟

2) إذا علمت أنه توجد 48 كرة في الكيس عين التركيبة الدقيقة له.

الحل

1) نرمز بـ P_3 إلى احتمال سحب كرة بيضاء نعلم أن $P_1 + P_2 + P_3 = 1$

ومنه $P_3 = 1 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

2) عدد الكرات السوداء هو $n_1 = p_1 \times 48 = 12$

عدد الكرات الحمراء هو $n_2 = p_2 \times 48 = 16$

عدد الكرات البيضاء هو $n_3 = p_3 \times 48 = 20$

تطبيق 8 إيجاد الأمل الرياضي والانحراف المعياري

إليك قانون احتمال متغير عشوائي :

X	-3	-2	1	2	3
p_i	0,1	0,35	0,15	؟	0,2

- احسب $P(X = 2)$ ثم $E(X)$ ، $\sigma(X)$

الحل

نعلم أن $P(X=-3) + P(X=-2) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$

ومنه $P(X=2) = 1 - \left[P(X=-3) + P(X=-2) + P(X=1) + P(X=3)\right] = 0{,}2$

$$E(X) = (-3)(0{,}1) + (-2)(0{,}35) + 0{,}15 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}2 = 0{,}15$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - E^2(X) = 9 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}35 + 0{,}15 + 4 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}2 - 0{,}0225$$

$$= 0{,}9 + 1{,}4 + 0{,}15 + 0{,}8 + 1{,}8 - 0{,}0225 = 6{,}3775$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2{,}525$$

تطبيق 9 قانون التوزيع المنتظم

تجربة تتمثل في رمي حجري نرد متزنين أوجه الأول مرقمة من 1 إلى 6 والثاني ثلاثة أوجه تحمل الرقم 0 والأخرى تحمل الرقم 6.

X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مخرج مجموع الرقمين المحصل عليهما، نفرض أن كل المخارج متساوية الاحتمال.

1) اعط قانون احتمال X

2) احسب $E(X)$ ، $\sigma(X)$.

الحل

1) مجموعة قيم X هي $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

2)

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12}{12} = \frac{78}{12} = 6{,}5$$

$$V(X) = \frac{1}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} + \frac{16}{12} + \frac{25}{12} + \frac{36}{12} + \frac{49}{12} + \frac{64}{12} + \frac{81}{12} + \frac{100}{12} + \frac{121}{12} + \frac{144}{12} - (6{,}5)^2$$

$$= 54{,}16 - 42{,}25 = 11{,}91$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11{,}91} = 3{,}45$$

تطبيق 10 إيجاد الأمل الرياضي والانحراف المعياري

كيس يحتوي على 5 كرات مرقمة كما يلي :

كرتان مرقمتان بـ 1 وأخريتان بـ 2 والخامسة بـ 3 ،

نسحب عشوائيا في نفس الوقت كرتين وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين.

1) عين قيم X ثم عين قانون X

2) احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$.

✓ الحل

1) مخارج هذه التجربة هي $B_1B'_1$ ، B_1B_2 ، $B_1B'_2$ ، B'_1B_2 ، $B'_1B'_2$ ، $B_2B'_2$ ، B_2B_3 ،
B'_2B_3 ، B_2B_3 ، B'_2B_3 .

وبالتالي عدد الحالات المكنة هي 10

ـ قيم المتغير العشوائي X هي 2 , 3 , 4 , 5

X	2	3	4	5
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$

$P_1 = P(X=2) = \frac{1}{10}$ ، $P_3 = P(X=4) = \frac{1}{10}$

$P_2 = P(X=3) = \frac{4}{10}$ ، $P_4 = P(X=5) = \frac{4}{10}$

2) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = \frac{2}{10} + \frac{12}{10} + \frac{4}{10} + \frac{20}{10} = 3{,}8$

$V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P_i - E^2(X) = \frac{4}{10} + \frac{36}{10} + \frac{16}{10} + \frac{100}{10} - (3{,}8)^2 = 15{,}6 - 14{,}44 = 1{,}16$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}16} = 1{,}077$

تطبيق 11 تعيين قانون احتمال وحساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري

نرمي كرتين A و B باتجاه حفرتين t_1 و t_2، بحيث كل كرة تصل إلى t_1 أو إلى t_2 بنفس الاحتمال وكل حفرة يمكنها استيعاب كلتا الكرتين.

1- أ) اكتب قائمة كل المخارج المكنة لهذه الرمية.

ب) ما هو احتمال الحادث D « الكرتين في نفس الحفرة » ؟

جـ) ما هو الحادث العكسي لـ D ؟

2) نربح 20 دج إذا دخلت الكرة في الحفرة t_1 ونخسر 40 دج إذا دخلت في t_2 وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه هي الربح (أو الخسارة) عند الرمي.

أ) ما هي قيم X ؟ ثم اعط قانون احتمال X.

ب) احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$

✓ الحل

1) أ) المخارج المكنة لهذه التجربة هي :

(Bt_1 , At_2) ، (At_1 , Bt_2) ، (At_1 , Bt_1) ، (At_2 , Bt_2)

فمثلا الثنائية (At_2 , Bt_2) تعبر عن أن الكرتين A و B في الحفرة t_2

ومنه عدد الحالات المكنة هي 4 .

ب) عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث D هي 2 ومنه $P(D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

والحادث العكسي للحادث D هو الحادث « كل كرة في حفرة »

2) أ) قيم المتغير العشوائي X هي 40 , 20- , 80 -

X	+40	−20	−80
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

الحادث « $(X = 40)$ » هو الكرتين في t_1

وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هي 1

إذن $P(X=40) = \frac{1}{4}$

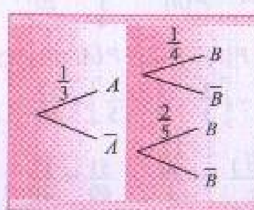
بنفس الطريقة نجد قيم احتمال الحوادث الأخرى.

ب) لدينا $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P_i = 40 \times \frac{1}{4} - 20 \times \frac{2}{4} - \frac{80}{4} = -20$

$V(X) = \sum x_i^2 P_i - E^2(X) = 1600 \times \frac{1}{4} + 400 \times \frac{2}{4} + 6400 \times \frac{1}{4} - 400 = 1800$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1800} \approx 42$

تطبيق 12 حساب احتمال حوادث باستعمال شجرة الاحتمالات



باستعمال المعطيات المدونة على الشجرة المجاورة حدد ما يلي :

$P(\overline{A})$ ، $P_A(\overline{B})$ ، $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

ثم استنتج $P(A \cap B)$ ، $P(A \cap \overline{B})$ ،

$P(\overline{A} \cap B)$ و $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

✓ الحل

ـ حسب قانون العقد لدينا $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

ومنه $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

ـ حسب قانون العقد لدينا $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$

ومنه $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = \frac{3}{4}$

ـ لدينا $P_{\overline{A}}(B) + P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1$

ومنه $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{3}{5}$

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

تطبيق 13 حساب احتمال حوادث

A و B حادثان بحيث $P(A)=\frac{2}{3}$ ، $P(B)=\frac{1}{4}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

1) احسب $P_A(B)$ ، $P_B(A)$

2) احسب $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ ثم استنتج $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

الحل

1) $$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{20}$$

2) $$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$$
$$=1-\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right]=\frac{17}{60}$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{17}{60}}{\frac{1}{3}}=\frac{51}{60}=\frac{17}{20}$$

تطبيق 14 الاحتمالات الشرطية

نفرض أن احتمال الازدياد للجنسين متساوي مهما كانت رتبة هذه الولادة.
نعتبر مجموعة تمثل عائلات لها طفلان ونختار منها عشوائيا عائلة.

1) احسب احتمال الحوادث التالية :

A « العائلة لها ذكران »

B « الطفل الأكبر ذكر »

C « العائلة لها على الأقل ذكر »

D « الطفل الأصغر بنت »

2) إذا علمت أن الطفل الأكبر ذكر احسب احتمال أن العائلة لها ذكران.

3) احسب $P_C(A)$ ، $P_D(A)$ ، $P_A(C)$

الحل

1) نرمز إلى البنت بـ F وإلى الذكر بـ M

الولادة (1): $\frac{1}{2}$ F ، $\frac{1}{2}$ M

الولادة (2): $\frac{1}{2}$ F → FF ، $\frac{1}{2}$ M → FM ، $\frac{1}{2}$ F → MF ، $\frac{1}{2}$ M → MM

. عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي 4

. عدد الحالات الملائمة لـ A هي 1

وبالتالي $P(A)=\frac{1}{4}$

. عدد الحالات الملائمة لـ B هي 2

ومنه $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

. عدد الحالات الملائمة لـ C هي 3

ومنه $P(C)=\frac{3}{4}=0{,}75$

. عدد الحالات الملائمة لـ D هي 2

ومنه $P(D)=\frac{2}{4}=0{,}5$

2) احتمال أن يكون للعائلة ذكرين هو احتمال السلك المؤدي إلى MM ويساوي $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

3) $P_C(A)$ احتمال أن العائلة لها ذكران علما أن على الأقل لها ذكر واحد.

بما أن A محتواة في C فإن $A\cap C=A$

إذن $$P_C(A)=\frac{P(C\cap A)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

. بما أن $A\cap D=\phi$ فإن $P_D(A)=\frac{P(D\cap A)}{P(D)}=\frac{0}{P(D)}=0$

. بما أن $A\subset C$ فإن $P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

تطبيق 15 مصداقية فحص طبي

نشخص مرض m بواسطة فحص طبي. وليكن T الحادث « الفحص موجب » و M الحادث « الشخص مريض ».

1) إذا علمت أن $P_M(T)=0{,}95$ و $P_{\overline{M}}(\overline{T})=0{,}95$ ، عبر بواسطة جمل عن معنى هاذين الاحتمالين.

2) إذا علمت أن 0,5 % من الأشخاص حاملون المرض m ما هو احتمال أن شخص له فحص موجب يكون مريضا ؟

الحل

1) $P_M(T)$ هو احتمال أن يكون الفحص موجبا علما أن الشخص مريض

$P_{\overline{M}}(\overline{T})$ هو احتمال أن الفحص سالب علما أن الشخص سليم.

$P_M(T)=0{,}95$ و $P_{\overline{M}}(\overline{T})=0{,}95$ يعني أن هذا الفحص له مصداقية أي في 95 % من الحالات يستطيع تشخيص المرض أن وجد.

2) 0,5 % من الأشخاص حاملون المرض

يعني أن $P(M)=\frac{0.5}{100}=0,005$

احتمال الحادث أن شخصا له فحص موجب يكون مريضا

هو $P_T(M)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}$

$$P_{\overline{M}}(\overline{T})=\frac{P(\overline{M}\cap\overline{T})}{P(\overline{M})}=\frac{P(\overline{M\cup T})}{1-P(M)}=\frac{1-P(M\cup T)}{1-P(M)}$$

$$P_{\overline{M}}(\overline{T})=\frac{1-P(M)-P(T)+P(M\cap T)}{1-P(M)}$$

$$0,95=\frac{1-0,005-P(T)+0,95\times 0,005}{1-0,005}$$

ومنه $-P(T)+0,99975=0,995\times 0,95$ إذن $P(T)=0,0545$

وبالتالي $P_T(M)=\frac{0,005\times 0,95}{0,0545}=0,087$

تطبيق 16 الاحتمالات الشرطية

ثلاث آلات A، B و C تنتج على الترتيب 40 %، 50 % و 10 % من البراغي (BOULONS) المنتجة، حيث كانت نسبة البراغي الفاسدة من طرف A، B، C هي على التوالي 3 %، 4 % و 5 % من عينة البراغي المنتجة. نختار عشوائيا برغيا.

1) ما هو احتمال أن يكون البرغي فاسدا ؟

2) إذا علمت أنه فاسد ما هو احتمال أنه أنتج من الآلة B ؟

الحل

1) نسمي D الحادث « البرغي فاسد »

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$$
$$=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$$
$$=0,4\times 0,03+0,5\times 0,04+0,1\times 0,05=0,037$$

2) احتمال هذا الحادث هو $P_D(B)$

لدينا $P_D(B)=\frac{P(D\cap B)}{P(D)}$

ومنه $P_D(B)=\frac{P(B)\times P_B(D)}{P(D)}$

$$=\frac{0,5\times 0,04}{0,037}=0,54$$

تطبيق 17 الاحتمالات الشرطية

A و B كيسان حيث A يشمل 10 كرات منها 4 حمراء و B يشمل 8 كرات منها 5 حمراء، نختار عشوائيا كيسا وكرة منه ونرمز بـ :

E إلى الحادث « اختيار الكيس A »

R إلى الحادث « الكرة المختارة حمراء »

1) احسب $P_E(R)$ و $P_{\overline{E}}(R)$ ثم استنتج $P(R)$.

2) إذا علمت أن هذه الكرة حمراء ما هو احتمال أن تكون من الكيس A ؟

الحل

1) في المستوى الأول نختار الكيس.

واحتمال كل واحد منهما هو $\frac{1}{2}$.

في المستوى الثاني لدينا اختيارين لكل كيس وهما :

إما الكرات المسحوبة حمراء (R)

وإما الكرات المسحوبة غير حمراء $(\overline{R})$

$P_E(R)$ هو احتمال أن تكون الكرة حمراء علما أنها سحبت من الكيس A. إذن $P_E(R)=\frac{4}{10}$

$P_{\overline{E}}(R)$ هو احتمال أن تكون الكرة حمراء علما أنها سحبت من الكيس B.

إذن $P_{\overline{E}}(R)=\frac{5}{8}$

$$P(R)=P(E)\times P_E(R)+P(\overline{E})\times P_{\overline{E}}(R)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{2}{10}+\frac{5}{16}=0,51$$

2) احتمال أن هذه الكرة من الكيس A علما أنها حمراء هو $P_R(E)$

$$P_R(E)=\frac{P(E\cap R)}{P(R)}=\frac{P(E)\times P_E(R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}}{0,51}=\frac{0,2}{0,51}=0,39$$

تطبيق 18 السحب على التوالي بالإرجاع وبدون إرجاع

كيس يحتوي على 5 كرات منها 3 لونها أحمر و 2 أسود.

التجربة الأولى : نسحب عشوائيا كرة ونسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس، ثم نسحب مرة أخرى وندون لونها.

التجربة الثانية : نسحب كرتين الواحدة تلوى الأخرى وبدون إرجاع وندون لونيهما.

1) أنشئ لكلتي التجربتين شجرة الاحتمالات والإمكانيات.

2) ما هو احتمال التحصل على كرتين حمراوتين في كلتي التجربتين ؟

✔ الحل

1) **تفسير الشجرة الأولى**

في المستوى الأول :

كتبنا $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$

فالعدد $\frac{3}{5}$ يمثل نسبة الكرات الحمراء في الكيس

والعدد $\frac{2}{5}$ يشمل نسبة الكرات السوداء في الكيس.

في المستوى الثاني :

بما أن السحب تم بالإرجاع فإن النسب تبقى نفسها.

شجرة التجربة (1)

تفسير الشجرة الثانية

في المستوى الأول :

له نفس تفسير المستوى الأول للشجرة الأولى.

في المستوى الثاني :

بما أن السحب تم بالإرجاع فإن عندما نتحصل على كرة حمراء في السحب الأول فإن نسبة الكرات الحمراء المتبقية هي $\frac{2}{4}$

ونسبة الكرات السوداء هي $\frac{2}{4}$ ونفس الشيء إذا تحصلنا على الكرة السوداء في السحب الأول.

شجرة التجربة (2)

2) الحادث E_1 « سحب كرتين حمراويتين » في التجربة الأولى.

هناك مسلك وحيد $\bullet\overset{\frac{3}{5}}{\text{—}}r\bullet\overset{\frac{3}{5}}{\text{—}}$ الذي يوافق الحادث E_1

ومنه $P(E_1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

الحادث E_2 « سحب كرتين حمراويتين » في التجربة الثانية

هناك مسلك وحيد يوافق هذا الحادث هو $\bullet\overset{\frac{3}{5}}{\text{—}}r\bullet\overset{\frac{2}{4}}{\text{—}}$

ومنه $P(E_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

تطبيق 19 السحب من ثلاثة أكياس مختلفة

لتكن ثلاثة أكياس A ، B ، C بحيث :

الكيس A يشمل 5 كرات أربع منها تحمل الحرف B والخامسة الحرف C.

الكيس B يشمل 5 كرات منها 3 تحمل الرقم 10 واثنتان الرقم 20 .

الكيس C يشمل 8 كرات واحدة تحمل الرقم 1000 وخمس الرقم 20 ، واثنتان تحملان الرقم 0 .

نسحب عشوائيا كرة من الكيس A ، و حسب نتيجة هذا السحب نسحب كرة إما من الكيس B أو من C .

نرمز بقيمة الدينار الرقم المسجل على الكرة المسحوبة.

أ) أنشئ شجرة الاحتمالات و الإمكانيات.

ما هو احتمال ربح 1000 دج ؟

ب) ما هو احتمال ربح 20 دج ؟

✔ الحل

أ) هناك مسلك وحيد يوافق الحادث « ربح 1000 دج »

و هو $\bullet\overset{\frac{1}{5}}{\text{—}}C\bullet\overset{\frac{1}{8}}{\text{—}}1000$

واحتماله هو جداء الاحتمالات الموجودة على المسلك

أي $P(1000) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{40} = 0{,}025$

ب) هناك مسلكان يوافقان هذا الحادث هما :

$\bullet\overset{\frac{4}{5}}{\text{—}}B\bullet\overset{\frac{2}{5}}{\text{—}}20$ و $\bullet\overset{\frac{1}{5}}{\text{—}}C\bullet\overset{\frac{5}{8}}{\text{—}}20$

واحتماله هو مجموع احتمالي المسلكين.

إذن $P(20) = P_1(20) + P_2(20) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{8}{25} + \frac{1}{8} = \frac{89}{200} = 0{,}445$

تطبيق 20 تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

نسحب عشوائيا كرة واحدة من كيس يحتوي على أربع كرات :

اثنتان منها لونهما أحمر R_1 ، R_2 والثالثة أخضر V والرابعة أبيض B ،

وبدون إرجاع الكرة نسحب كرة أخرى للمرة الثانية.

نتيجة هذه التجربة عبارة عن ثنائية عنصرها الأول هو الكرة المحصل عليها في السحب الأول وعنصرها الثاني هو الكرة المحصل عليها في السحب الثاني.

نفرض أن كل النتائج متساوية الاحتمال.

1) مثل هذه الوضعية بشجرة الاحتمالات.

2) نرفق الوضعية السابقة بقاعدة لعبة :

لكل كرة حمراء مسحوبة نربح 100 دج والخضراء 200 دج

أما البيضاء فنخسر 200 دج وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة ممكنة الربح (أو الخسارة) المحصل عليها.

عين مجموعة قيم X ثم أعط قانون احتماله، ثم احسب $E(X)$



✓ الحل

1) عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو 12

2) قيم المتغير العشوائي X هي 200 ، 300 ، -100 ، 0

- الحادث $(X=0)$ هو الحصول على كرة خضراء وكرة بيضاء وعدد الحالات الملائمة له هو 2

إذن $P(X=0)=\frac{2}{12}$

- الحادث $(X=200)$ هو الحصول على كرتين حمراويتين وعدد الحالات الملائمة له هو 2

إذن $P(X=200)=\frac{2}{12}$

- الحادث $(X=300)$ هو الحصول على كرة حمراء و كرة خضراء وعدد الحالات الملائمة له هو 4

إذن $P(X=300)=\frac{4}{12}$

- الحادث $(X=-100)$ هو الحصول على كرة حمراء وكرة بيضاء وعدد الحالات الملائمة له هو 4

إذن $P(X=-100)=\frac{4}{12}$

السحب الثاني السحب الأول

X	0	200	300	-100
P_i	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$

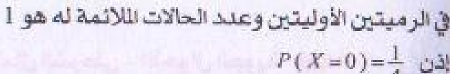
$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4} x_i\,p_i = 0\times\frac{2}{12}+200\times\frac{2}{12}+300\times\frac{4}{12}+(-100)\times\frac{4}{12}=100$$

تطبيق 21 استقلالية متغيرين عشوائيين

قصاصة متزنة لها وجه أحمر و الآخر أخضر، نرمي هذه القصاصة ثلاث مرات متتالية ونسجل في كل مرة لون الوجه العلوي بعد السقوط.
نرمز بـ X إلى عدد مرات ظهور اللون الأحمر (R) في الرميتين الأوليتين،
و بـ Y إلى عدد مرات ظهور الوجه الأخضر (V) في الرميات الثلاثة.
1) اعط قانوني احتمال X و Y.
2) احسب $E(X)$ و $V(X)$ ، $E(Y)$ ، $V(Y)$
3) احسب $P((X=1)\cap(Y=2))$ ، هل المتغيرين X و Y مستقلين ؟

✓ الحل

1) قيم X هي 0، 1، 2
وعدد الحالات الممكنة هو 4
• الحادث $(X=0)$ الحادث عدم ظهور اللون الأحمر



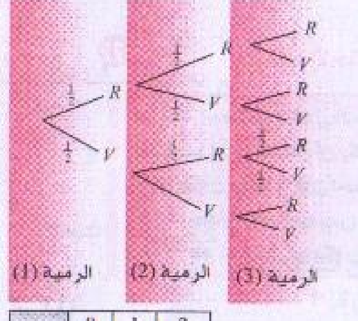
في الرميتين الأوليتين وعدد الحالات الملائمة له هو 1

إذن $P(X=0)=\frac{1}{4}$

• $(X=1)$ الحادث ظهور اللون الأحمر مرة واحدة وعدد الحالات الملائمة له هو 2

إذن $P(X=1)=\frac{2}{4}$

• قيم Y هي 0، 1، 2، 3
عدد الحالات الممكنة هو 8



X	0	1	2
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

الحادث $(Y=0)$ الحادث عدم ظهور كرة خضراء في الرميات الثلاث وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هو 1

إذن $P(Y=0)=\frac{1}{8}$

• $(Y=1)$ الحادث ظهور مرة واحدة كرة خضراء في الرميات الثلاث وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هو 3

إذن $P(Y=1)=\frac{3}{8}$

Y	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) $E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i P_i = 0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$

$$V(X)=\frac{2}{4}+4\times\frac{1}{4}-1=\frac{6}{4}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

$$V(Y)=1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}-\frac{9}{4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

3) الحادث $(Y=2)$ و $(X=1)$ معناه ظهور مرة واحدة اللون الأحمر في الرميتين الأولى والثانية وظهور مرتين اللون الأخضر في الرميات الثلاث.
هناك مسلكان وحيدان لتحقيق هذا الحادث وهما:

$$\bullet\overset{\frac{1}{2}}{\text{—}}V\bullet\overset{\frac{1}{2}}{\text{—}}R\bullet\overset{\frac{1}{2}}{\text{—}}V \quad \text{و} \quad \bullet\overset{\frac{1}{2}}{\text{—}}R\bullet\overset{\frac{1}{2}}{\text{—}}V\bullet\overset{\frac{1}{2}}{\text{—}}V$$

وحسب قاعدة احتمال مسلك فإن:

$$P[(X=1)\cap(Y=2)]=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

- لدينا $P(X=1)=\frac{1}{2}$ و $P(Y=2)=\frac{3}{8}$

ومنه $P(X=1)\times P(Y=2)=\frac{3}{16}$

إذن $P[(X=1)\cap(Y=2)]\neq P(X=1)\times P(Y=2)$

وهذا يعني أن المتغيرين X و Y مرتبطان.

تطبيق 22 الاحتمال الشرطي - الأحوال الجوية

دراسة إحصائية حول الأحوال الجوية سمحت لنا بتقدير أنه إذا كان يوم ما مشمسا فإن احتمال أن يكون اليوم الموالي له مشمسا هو 0,80
وإذا كان ممطرا فإن احتمال أن يكون اليوم الذي يليه مشمسا هو 0,3.
1) إذا كان يوم الخميس مشمسا ما هو احتمال أن يكون يوم السبت مشمسا ؟
2) ما هو احتمال أن يكون يوم السبت مشمسا إذا كان يوم الخميس ممطرا ؟

الحل

نرمز بـ S إلى يوم مشمس و W إلى يوم ممطر.
احتمال يوم مشمس يساوي احتمال يوم ممطر
وعليه $P(S)=P(W)=\frac{1}{2}$

1) B هو الحادث:
« يوم السبت مشمس علما أن يوم الخميس مشمس » هناك مسلكان وحيدان يوافقان هذا الحادث وهما:

$\bullet \xrightarrow{0,5} S \bullet \xrightarrow{0,2} W \bullet \xrightarrow{0,3} S$ و $\bullet \xrightarrow{0,5} S \bullet \xrightarrow{0,8} S \bullet \xrightarrow{0,8} S$

ومنه $P(B)=0,5\times0,2\times0,3+0,5\times0,8\times0,8=0,35$

2) A الحادث « يوم السبت مشمس علما أن يوم الخميس ممطر »
هناك مسلكان وحيدان يوافقان هذا الحادث وهما:

$\bullet \xrightarrow{0,5} W \bullet \xrightarrow{0,7} W \bullet \xrightarrow{0,3} S$ و $\bullet \xrightarrow{0,5} W \bullet \xrightarrow{0,3} S \bullet \xrightarrow{0,7} S$

ومنه $P(A)=0,5\times0,7\times0,3+0,5\times0,3\times0,7=0,21$

تطبيق 23 المراقبة الجبائية - الاحتمال الشرطي

نسمي E الحادث « التعرض لمراقبة جبائية ».
بالنسبة إلى مؤسسة موجودة في منطقة A احتمال الحادث E هو 0,3
وبالنسبة إلى أخرى موجودة في منطقة B هو 0,25
مجموعة تملك مؤسستين واحدة في A والأخرى في B تقبل أن المراقبة المنجزة في A مستقلة عنها في B.
احسب احتمالات كل حادث من الحادثين التاليين:
1) E_1 هو الحادث « المؤسستان تعرضتا إلى المراقبة ».
2) E_2 هو الحادث « مؤسسة واحدة تعرضت للمراقبة ».

الحل

عدد الحالات الممكنة لهذه الوضعية هو 4
إن احتمال اختيار A يساوي احتمال اختيار B
وبالتالي $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$

1) هناك مسلكان وحيدان هما:
$\bullet \xrightarrow{0,5} B \bullet \xrightarrow{0,25} E$ و $\bullet \xrightarrow{0,5} A \bullet \xrightarrow{0,3} E$ يوافقان هذا الحادث.
إذن $P(E_1)=0,5\times0,3+0,5\times0,25=0,15+0,125=0,275$

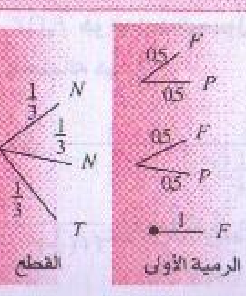
2) هناك مسلكان وحيدان يوافقان الحادث E_2 وعليه:

$$E_2=((A\cap E)\cap(B\cap\overline{E}))\cup((A\cap\overline{E})\cap(B\cap E))$$
$$P(E_2)=P((A\cap E)\cap(B\cap\overline{E}))+P((A\cap\overline{E})\cap(B\cap E))$$
$$=P(A\cap E)\times P(B\cap\overline{E})+P(A\cap\overline{E})\times P(B\cap E)$$
$$=0,5\times0,3+0,5\times0,75+0,5\times0,7\times0,5\times0,25=0,6062$$

تطبيق 24 الاحتمالات الشرطية والمتتاليات

كيس يحتوي على ثلاث قطع نقدية لا نفرق بينها عند اللمس، اثنتان منها عادية (N) أي لها الوجه (F) والظهر (P) والثالثة مزيفة (T) تحمل وجهين (F).
نختار عشوائيا قطعة ونقوم بصفة مستقلة برميات متتالية لهذه القطعة
وليكن الحادثان L و F_n حيث:
L « نتحصل على الظهر P في الرمية الأولى »
F_n « نتحصل على الوجه F في الرميات n الأولى »
1) احسب احتمال الحادث L ثم بين أن $P(F_n)=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$
2) إذا علمت أننا تحصلنا على الوجه (F) في الرميات n الأولى ما هو احتمال أننا اخترنا القطعة المزيفة ؟
ما هي نهاية هذا الاحتمال لما n يؤول إلى $(+\infty)$ ؟

الحل



1) عدد الحالات الممكنة للحادث L هو 5
هناك مسلكان وحيدان يوافقان الحادث L وهما:
$\bullet \xrightarrow{\frac{1}{3}} N \bullet \xrightarrow{\frac{1}{2}} P$ و $\bullet \xrightarrow{\frac{1}{3}} N \bullet \xrightarrow{\frac{1}{2}} P$
وحسب قاعدة احتمال حادث
فإن $P(L)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

- نبرهن على المساواة $P(F_n)=\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^{n-1}\right]$ بالتراجع على n.

من أجل $n=1$ لدينا $P(F_1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]$

ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n=1$

- نفرض انها صحيحة من أجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$.

بما ان الرميات مستقلة فيها بينها فإن احتمال ظهور الوجه F في الرميات n الأولى هو جداء احتمالات ظهور الوجه F في كل رمية

اي $\underbrace{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\times\ldots\times(\frac{1}{2})}_{n \text{ مرة}}=(\frac{1}{2})^n$

القطع | الرمية n | الرمية $(n+1)$

هناك ثلاث مسالك وحيدة توافق الحادث F_{n+1} وهي:

$\bullet \xrightarrow{\frac{1}{3}} N \bullet \xrightarrow{(\frac{1}{2})^n} F \bullet \xrightarrow{\frac{1}{2}} F$

$\bullet \xrightarrow{\frac{1}{3}} N \bullet \xrightarrow{(\frac{1}{2})^n} F \bullet \xrightarrow{\frac{1}{2}} F$

$\bullet \xrightarrow{\frac{1}{3}} T \bullet \xrightarrow{1^n} F \bullet \xrightarrow{1} F$

وحسب قاعدة الاحتمال فإن:

$$P(F_{n+1})=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^n\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^n\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1^n\times1=\frac{1}{3}\left[(\frac{1}{2})^{n+1}+(\frac{1}{2})^{n+1}+1\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+2(\frac{1}{2})^{n+1}\right]=\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^n\right]$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي فالخاصية صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

2) $P_{F_n}(T)$ هو احتمال الحادث

« استعمال القطعة المزيفة علما أننا تحصلنا على الوجه F في الرميات n الأولى »

$$P_{F_n}(T)=\frac{P(F_n\cap T)}{P(F_n)}$$

$F_n\cap T$ هو الحادث الحصول على الوجه F في الرميات n الأولى باستعمال القطعة (T)

واحتماله هو $\frac{1}{3}$

إذن $P_{F_n}(T)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^{n-1}\right]}=\dfrac{1}{1+(\frac{1}{2})^{n-1}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}P_{F_n}(T)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+(\frac{1}{2})^{n-1}}=1$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^{n-1}=0$

تطبيق 25 حساب الاحتمالات الشرطية

في جبل الشريعة عائلتان A و B يوضع تحت تصرفهما خمسة مسالك C_1، C_2، C_3، C_4، C_5.

I) في كل صباح تختار كل عائلة عشوائيا وباستقلالية عن العائلة الأخرى مسلكا.

1) ما هو عدد الحالات الممكنة لكلتا العائلتين ؟

2) ما هو احتمال أن يختارا نفس المسلك ؟

3) ما هو احتمال انهما في ظرف n يوم متتالية لا تختاران ابدا نفس المسلك ؟

4) عين أصغر قيمة لـ n التي من اجلها احتمال التلاقي على الأقل مرة واحدة على نفس المسلك أكبر من أو يساوي 0,9 .

II) نعتبر في هذا الجزء يومين متتاليين حيث تلغي كل عائلة في اليوم الثاني من سحبها كل مسلك اخذته في اليوم السابق إذن تبقى أربعة مسالك

E هو الحادث « تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الأول »

F هو الحادث « تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الثاني »

احسب $P(E)$، $P_E(F)$ ثم $P_{\bar{E}}(F)$، $P(F\cap E)$، $P(F\cap\overline{E})$ واستنتج $P(F)$.

✓ الحل

1) نستعمل طريقة ملء الخانات لتعيين عدد الحالات الممكنة

B	A
5 اختيارات	5 اختيارات

العائلة A لها 5 اختيارات ومن أجل كل اختيار لـ A يوجد 5 اختيارات لـ B

وبالتالي عدد الحالات الممكنة هو $5\times5=25$

2) عدد الحالات الممكنة لاختيار نفس المسلك هو 5

B	A
1 اختيار	5 اختيارات

اي إذا كان لـ A خمسة اختيارات فإن B له اختيار واحد

وبالتالي احتمال هذا الحادث هو $\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

3) S هو الحادث « لا تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الأول »

عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث S هو 5×4 اي 20

وبالتالي $P(S)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

الحادث الذي نبحث عن احتماله هو $\underbrace{S\cap S\cap\ldots\cap S}_{n \text{ مرة}}$

إذن احتماله هو:

$$P(\underbrace{S\cap S\cap\ldots\cap S}_{n \text{ مرة}})=\underbrace{P(S)\times P(S)\times\ldots\times P(S)}_{n \text{ مرة}}=(P(S))^n=(\frac{4}{5})^n$$

4) الحادث العكسي للحادث D « التلاقي على الأقل مرة واحدة على نفس المسلك » هو الحادث « لا تلتقي العائلتان ابدا في نفس المسلك على مدار n يوم »

إذن $P(D)=1-P(\underbrace{S\cap S\cap ... \cap S}_{n})=1-(\frac{4}{5})^n$

$P(D)\ge 0{,}9$ يعني $1-(\frac{4}{5})^n \ge 0{,}9$ أي $(\frac{4}{5})^n \le 0{,}1$

وبالتالي $n \ge 8{,}005$

إذن أصغر قيمة لـ n المطلوبة هي 9 .

11) عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث E هو 5

أي من أجل كل اختيار لـ A يوجد اختيار واحد لـ B

إذن $P(E)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

– $P_E(F)$ هو احتمال الحادث « تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الثاني علما أنهما أخذتا نفس المسلك في اليوم الأول »

نستعمل طريقة ملء الخانات لتعيين عدد الحالات المكنة.

بما أن كل عائلة تختار مسلك من بين أربعة مسالك فإن عدد الإمكانيات هو $4\times4=16$

وعدد الحالات الملائمة هو 4

إذن $P_E(F)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

و من أجل شجرة الاحتمالات المجاورة يكون لدينا :

$P_{\overline{E}}(F)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

و لدينا $P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}$ ومنه $P(E\cap F)=P(E)\times P_E(F)$

أي $P(E\cap F)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

$P(F\cap\overline{E})=P(\overline{E})\times P_{\overline{E}}(F)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$P(F)=P(E)\times P_E(F)+P(\overline{E})\times P_{\overline{E}}(F)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

تطبيق 26 حساب الاحتمالات الشرطية

الجدول التالي يمثل توزيع الزمر الدموية لبلد ما :



	O	A	B	AB
Rhésus (+)	35,0%	38,1%	6,2 %	2,8 %
Rhésus (−)	9,0%	7,2%	1,2%	0,5%

1) السؤال هو إكمال الشجرة السابقة وهذا باستعمال معطيات الجدول.
التجربة تتمثل في اختيار شخص عشوائيا من المجتمع.

ليكن $Rh+$ الحادث « الشخص المختار له المعامل $Rh^{(+)}$ »

و O هو الحادث « الشخص ينتمي إلى فصيلة O »

أ) عين الاحتمال P_1 أي $P(Rh_{(+)})$ ثم احسب P_2 .

ب) اكمل الشجرة وذلك باستبدال كل علامة استفهام بالاحتمال الموافق لها.

2-أ) انطلاقا من الشجرة كيف نستطيع تعيين احتمال O ؟ ثم تحقق من هذه النتيجة من الجدول.

ب) ما هو احتمال أن شخص فصيلة دمه O يحمل المعامل $Rh(+)$ ؟

3-أ) نعتبر n شخصا مختارا عشوائيا من مجتمع.

احسب بدلالة n الاحتمال P بحيث يكون من بين n شخص على الأقل واحد فصيلته O ثم احسب نهايته.

ب) احسب أصغر قيمة لـ n بحيث $P\ge 0{,}999$.

الحل

1) أ) $P_1=P(Rh_+)=P(Rh_+\cap O)+P(Rh_+\cap A)+P(Rh_+\cap B)+P(Rh_+\cap AB)$

$=0{,}35+0{,}381+0{,}062+0{,}028=0{,}821$

$P_2=P_{Rh+}(O)=\frac{P(O\cap Rh_+)}{P(Rh+)}=\frac{0{,}35}{0{,}821}=0{,}426$

2) أ) هناك مسلكان يوافقان الحادث O

وحسب قاعدة الاحتمال فإن :

$P(O)=0{,}821\times 0{,}426+0{,}179\times 0{,}503$

$=0{,}350+0{,}09=0{,}44$

من الجدول نجد $P(O)=0{,}35+0{,}09=0{,}44$

ب) $P_O(Rh+)=\frac{P(O\cap Rh_{(+)})}{P(O)}$

$=\frac{0{,}426\times 0{,}821}{0{,}44}=\frac{0{,}35}{0{,}44}=0{,}80$

3) أ) الحادث الذي نريد حساب احتماله هو الحادث العكسي للحادث « لا يوجد أي شخص من بين n شخص فصيلة دمه O »

احتمال الحادث « شخص فصيلته مختلفة عن O » هو :

$P(\overline{O})=1-P(O)=0{,}54$

إذن $P=1-P(\overline{O})\times P(\overline{O})\times ...\times P(\overline{O})=1-(0{,}54)^n$

$\lim_{n\to+\infty}P=\lim 1-(0{,}54)^n=1$

نفسر النهاية على أن كلما كان n كبيرا بالقدر الكافي يكون هذا الحادث أكيدا.

ب) $P\ge 0{,}999$ يعني $1-(0{,}54)^n\ge 0{,}999$ وبعد حل هذه المتراجحة نجد $n\ge\frac{Ln(0{,}001)}{Ln(0{,}54)}$

ومنه أصغر قيمة لـ n هي 12 .

تطبيق 27 الاحتمالات الشرطية في مسابقة رمي الرمح

شارك متنافسان A و B في مسابقة تتمثل في رمي رمح على هدف مجزأ إلى ثلاث خانات (1)، (2) و (3). ونقبل أنه عند كل رمية يصيب كل منهما خانة وحيدة وأن الرميات مستقلة فيما بينها.

بالنسبة إلى المتنافس A : احتمالات إصابة الخانات (1)، (2)، (3) هي على التوالي $\frac{1}{12}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{7}{12}$

بالنسبة إلى المتنافس B : كل المخارج متساوية الاحتمال.

1) المتسابق A يقوم بثلاث رميات مستقلة فيما بينها.

أ) ما هو احتمال أن يصيب في كل مرة الخانة 3 ؟

ب) ما هو احتمال أن يصيب الخانات (1)، (2)، (3) في الرميات 1، 2 و 3 على الترتيب.

جـ) ما هو احتمال أن يصيب الخانات (1)، (2)، (3) ؟

2) نختار عشوائيا واحدا من المتنافسين بحيث احتمال اختيار A يساوي ضعف اختيار B.

أ) تنجز رمية واحدة ، ما هو احتمال أن تصاب الخانة (3) ؟

ب) أنجزت رمية وحيدة والخانة (3) أصيبت ما هو احتمال أن A هو الذي سدد الرمح؟

الحل

1) أ) احتمال أن يصيب في كل مرة الخانة (3) هو $(\frac{7}{12})^3 = 0.583$

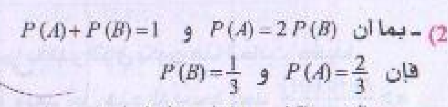
ب) احتمال أن يصيب الخانات (1)، (2)، (3) في الرميات 1، 2، 3 على التوالي هو :

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = 0{,}016$$

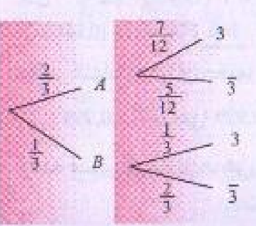

(المسلك الموافق للحادث) $\xrightarrow{\frac{1}{12}} (1) \xrightarrow{\frac{1}{3}} (2) \xrightarrow{\frac{7}{12}} (3)$

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

جـ) توجد 6 مسالك لها نفس الاحتمال توافق الحادث الذي نبحث عن احتماله. وبالتالي احتمال الحادث الذي نبحث عنه هو $6(\frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12}) = \frac{7}{72}$


2) - بما أن $P(A) = 2P(B)$ و $P(A) + P(B) = 1$

فإن $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$



أ) هناك مسلكان يوافقان هذا الحادث وهما :

$\xrightarrow{\frac{2}{3}} A \xrightarrow{\frac{7}{12}} (3)$ و $\xrightarrow{\frac{1}{3}} B \xrightarrow{\frac{1}{3}} (3)$

وحسب قاعدة احتمال حادث فإن احتمال الحادث المعطى هو :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{1}{2} = 0.5$$

ب) $P_3(A) = \frac{P(3 \cap A)}{P(3)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{7}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{9}$

تطبيق 28 التعرف على استقلالية حوادث

نرمي حجر نرد متزن مرتين متتاليتين، أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 ولنعتبر الأحداث التالية :

A الحادث « الرقم الأول المحصل عليه زوجي »

B الحادث « الرقم الثاني المحصل عليه زوجي »

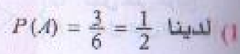
C الحادث « مجموع الرقمين المحصل عليهما زوجي »

1) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$

2) احسب $P(A \cap B)$ ، $P(B \cap C)$ و $P(C \cap A)$ هل الحوادث A ، B ، C مستقلة مثنى مثنى ؟

3) احسب $P(A \cap B \cap C)$ وهل $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$ ؟

الحل



1) لدينا $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

و $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

و $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

الرمية الأولى — الرمية الثانية

2) لدينا $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

و $P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

و $P(C \cap A) = \frac{1}{4}$


وبالتالي نستنتج أن الحوادث A ، B ، C مستقلة مثنى مثنى.

3) لدينا $P(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ و $P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{8}$

ومنه $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$

إذن A ، B ، C ليست مستقلة إجمالا.

تطبيق 29 المتتاليات والاحتمالات الشرطية

يونس يقوم بلعبة. بحيث حظوظ الربح هي نفس حظوظ الخسارة في شوطها الأول. وتقبل انه إذا ربح شوطا من هذه اللعبة فإن احتمال ربح الشوط الموالي له هو 0,4 وإذا خسر شوطا فإن احتمال خسارة الشوط الموالي هو 0,8 .

n عدد طبيعي غير معدوم.

G_n الحادث « يربح الشوط رقم n »

P_n الحادث « يخسر الشوط رقم n »

I) 1) احسب ما يلي $P(G_1)$ ، $P_{G_1}(G_2)$ ، $P_{P_1}(G_2)$ واستنتج $P(G_2)$.

2) احسب $P(P_2)$

II) من أجل كل n غير معدوم نضع $x_n = P(G_n)$ و $y_n = P(P_n)$

1) عين من أجل كل $n \in IN^*$ يكون $P_{P_n}(P_{n+1})$ و $P_{G_n}(G_{n+1})$.

2) بين انه من أجل كل $n \in IN^*$ يكون $\begin{cases} x_{n+1} = 0,4\,x_n + 0,2\,y_n \\ y_{n+1} = 0,6\,x_n + 0,8\,y_n \end{cases}$

3) من أجل كل $n \in IN^*$ نضع $V_n = x_n + y_n$ و $W_n = 6x_n - 2y_n$

بين أن (V_n) ثابتة و (W_n) هندسية يطلب تعيين حدها العام.

4) استنتج عبارة x_n بدلالة n ثم عين نهاية (x_n) ماذا تستنتج ؟

✓ الحل

G تدل على الربح

P تدل على الخسارة

الشوط الأول: $\frac{1}{2}$ G ، $\frac{1}{2}$ P

الشوط الثاني: 0,4 G ← $G \cap G$ ، 0,6 P ← $P \cap G$ ، 0,2 G ← $G \cap P$ ، 0,8 P ← $P \cap P$

I-1) G_1 هو الحادث :

« يونس يربح الشوط (1) »

ومنه $P(G_1) = \frac{1}{2}$

$P_{G_1}(G_2)$ احتمال الربح في الشوط (2) علما انه ربح في الشوط (1)

إذن $P_{G_1}(G_2) = 0,4$ و $P_{P_1}(G_2) = 0,2$

ـ لدينا $P(G_2) = P(G \cap G) + P(P \cap G)$

إذن $P(G_2) = \frac{1}{2} \times 0,4 + \frac{1}{2} \times 0,2 = 0,3$

2) لدينا $P(P_2) = P(P \cap P) + P(G \cap P)$

إذن $P(P_2) = \frac{1}{2} \times 0,8 + \frac{1}{2} \times 0,6 = 0,4 + 0,3 = 0,7$

الشوط (n): x_n G ، y_n P

الشوط $(n+1)$: 0,4 G ، 0,6 P ، 0,2 G ، 0,8 P ؛ G_{n+1} ، P_{n+1}

II-1) $P_{P_n}(P_{n+1})$ هو احتمال خسارة الشوط $(n+1)$ علما انه خسر الشوط (n)

وبالتالي $P_{P_n}(P_{n+1}) = 0,8$

ـ يمثل $P_{G_n}(G_{n+1})$ احتمال ربح الشوط رقم $(n+1)$ علما انه ربح الشوط رقم (n)

وبالتالي $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,4$

2) هناك مسلكان يوافقان الحادث G_{n+1} وهناك مسلكان يوافقان الحادث P_{n+1} كما هو موضح في الشجرة وحسب قاعدة احتمال حادث نجد :

$$\begin{cases} x_{n+1} = P(G_{n+1}) = 0,4 \times x_n + 0,2\,y_n \\ y_{n+1} = P(P_{n+1}) = 0,6\;x_n + 0,8\,y_n \end{cases}$$

3) حسب قاعدة احتمال العقد فإن $x_n + y_n = 1$ وبالتالي $V_n = 1$

$$W_{n+1} = 6\,x_{n+1} - 2\,y_{n+1} = 6\,(0,4\,x_n + 0,2\,y_n) - 2\,(0,6\,x_n + 0,8\,y_n)$$

$$= 6 \times 0,4\,x_n + 6 \times 0,2\,y_n - 2 \times 0,6\,x_n - 2 \times 0,8\,y_n$$

$$= 1,2\,x_n - 0,4\,y_n = \frac{12}{10}x_n - \frac{4}{10}y_n = \frac{2}{10}(6\,x_n - 2\,y_n) = \frac{1}{5}w_n$$

إذن (W_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ وحدها الأول W_1 حيث $W_1 = 6\,x_1 - 2\,y_1$

$$W_1 = 6\,P(G_1) - 2\,P(P_1) = 6 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

إذن $W_n = W_1 \times (\frac{1}{5})^{n-1} = 2 \times (\frac{1}{5})^{n-1}$

4) $\begin{cases} 6\,x_n - 2\,y_n = 2(\frac{1}{5})^{n-1} \\ x_n + y_n = 1 \end{cases}$ ومنه نجد $x_n = \frac{1}{4}\left[1 + (\frac{1}{5})^{n-1}\right]$

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{4}\left[1 + (\frac{1}{5})^{n-1}\right] = \frac{1}{4}$$

ومنه (x_n) متقاربة نحو $\frac{1}{4}$ و $\lim_{n \to +\infty} y_n = \frac{3}{4}$

لما يكون n كبيرا بالقدر الكافي فان احتمال الخسارة أكبر بكثير من احتمال الربح.

تطبيق 30 تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

لدراسة تصرفات الفئران نقوم بتجربة تتمثل في وضع فأر في حجرة لها أربعة أبواب متشابهة ، لكن 3 منها مكهربة. في كل مرة يختارهذا الفار بابا فيجده مكهربا حيث يتلقى صدمة كهربائية ترجعه إلى مكانه الابتدائي وهكذا حتى يجد الباب الغير المكهرب .

1) ـ عين احتمالات الأحداث التالية ـ علما انه ليست للفار ذاكرة اي احتمال اختياره في كل مرة بابا من الأبواب الأربعة يكون متساويا. :

A_1 « يخرج في المرة الأولى »

A_2 « يخرج في المرة الثانية »

A_4 « يخرج في المرة الرابعة »

A_n « يخرج في المرة n »

2) نفرض ان للفار ذاكرة كاملة اي في كل مرة يتجنب الباب المكهربة المختارة سابقا ويختار بشكل متساوي الاحتمال بابا من الأبواب المتبقية.

وليكن X هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد المحاولات التي قام بها هذا الفأر.
أ) عين قانون احتمال X.
ب) احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$.

الحل

1) نرمز بـ M إلى الباب المكهربة و N إلى الباب الغير مكهربة.
بما أن الأبواب لها نفس احتمال الاختيار
فإن احتمال اختيار M هو $\frac{3}{4}$ واختيار N هو $\frac{1}{4}$

المرة الأولى — المرة الثانية

أ) مسلك A_1 هو $\bullet\xrightarrow{\frac{1}{4}} N$ وبالتالي احتماله
هو $P(A_1) = \frac{1}{4} \times (\frac{3}{4})^{1-1} = \frac{1}{4}$

مسلك A_2 هو $\bullet\xrightarrow{\frac{3}{4}} M \bullet\xrightarrow{\frac{1}{4}} N$ وبالتالي احتماله
هو $P(A_2) = \frac{1}{4} \times (\frac{3}{4})^{2-1} = \frac{3}{16}$

- هناك مسلك وحيد يمثل A_4 و هو
$\bullet\xrightarrow{\frac{3}{4}} M \bullet\xrightarrow{\frac{3}{4}} M \bullet\xrightarrow{\frac{3}{4}} M \bullet\xrightarrow{\frac{1}{4}} N$ وحسب قاعدة احتمال حادث
فإن $P(A_4) = \frac{1}{4} \times (\frac{3}{4})^3 = \frac{1}{4} (\frac{3}{4})^{4-1}$

- هناك مسلك وحيد يمثل A_n هو :
$\bullet\xrightarrow{(1)} M \bullet\xrightarrow{(2)} M \bullet\xrightarrow{(3)} M \bullet\!\longrightarrow \cdots \bullet\xrightarrow{n-1} M \bullet\xrightarrow{n} N$
إذن $P(A_n) = \frac{1}{4} \times (\frac{3}{4})^{n-1}$

2) أ) قيم X هي 1 ، 2 ، 3 ، 4

$P(X=1) = \frac{1}{4}$ ، $P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$

X	1	2	3	4
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

ب) $E(X) = 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P_i - E^2(X) = 1\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4 - \frac{25}{4}$

$= \frac{1+4+9+16-25}{4} = \frac{3}{4}$ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تطبيق 31 التعرف على استقلالية متغيرين عشوائيين

نرمي حجري نرد متزنين، ونرمز بـ S إلى مجموع الرقمين المتحصل عليهما، وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه باقي قسمة S على 2 و Y المتغير العشوائي الذي قيمه باقي قسمة S على 4.
1) عين قانون S
2) عين قانوني X و Y
3) عين قانون الثنائية (X , Y) و هل المتغيرين X و Y مستقلين ؟

الحل

1) مجموعة قيم S هي 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، ... ، 12

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

عدد الحالات الممكنة هو $6\times6=36$

2) القيم التي يأخذها X هي 0 ، 1 . القيم التي يأخذها Y هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 .
عدد الحالات الممكنة هو 11 وهي الأعداد من 2 إلى 12

X	0	1
P_i	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$

قانون احتمال X

Y	0	1	2	3
P_i	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$

قانون احتمال Y

3) وجود الصفر في خانة من جدول قانون احتمال (X , Y) يستلزم الارتباط.

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{3}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	0
1	0	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{3}{11}$

تطبيق 32 التعرف على استقلالية متغيرين

علب مرقمة من 1 إلى 4 (هذه الأرقام مغطاة):
العلبة رقم 1 تحتوي على كرة مرقمة بـ 1
والعلبة رقم 2 فيها كرتان مرقمتان 1 و 2 .
والعلبة 3 تحتوي على ثلاث كرات مرقمة 1 ، 2 ، 3

والعلبة 4 تحتوي على أربع كرات مرقمة من 1 إلى 4.
نختار عشوائيا علبة وكذا كرة من هذه العلبة.
وليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي ترقيم العلبة. و Y هو المتغير العشوائي الذي يساوي رقم الكرة المختارة.
أ) عين قانون احتمال الثنائية (X , Y) مبرزا قانون X و Y على هامشي جدولي قانوني X و Y.
ب) تحقق أن X و Y ليسا مستقلين.

الحل

أ) قيم X هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ومجموعة الإمكانيات هي 4
قيم Y هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ومجموعة الإمكانيات هو 10 (10 كرات)

X	1	2	3	4
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

قانون X

Y	1	2	3	4
P_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

قانون Y

قانون (X , Y)

X \ Y	1	2	3	4	قانون X
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	المجموع يساوي 1

$$P((X=x_i)\cap(Y=y_j)) = P(X=x_i) \times P_{(X=x_i)}(Y=y_j)$$

$$P((X=1)\cap(Y=1)) = P(X=1) \times P_{(X=1)}(Y=1) = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$P((X=3)\cap(Y=2)) = P(X=3) \times P_{(X=3)}(Y=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

وهكذا نملأ جدول قانون احتمال الثنائية (X , Y)

ب) بما أن $P(X=1) = \frac{1}{4}$ و $P(Y=1) = \frac{4}{10}$ و $P(X=1)\cap P(Y=1) = \frac{1}{4}$

و $\frac{1}{4} \times \frac{4}{10} \neq \frac{1}{4}$ فإن المتغيرين X و Y مرتبطان.
لاحظ أيضا وجود الصفر في خانة من خانات جدول قانون (X , Y) يستلزم أن X و Y مرتبطان.

تطبيق 33 الاحتمالات والوراثة

في مجتمع (الجيل الصفر) مكون من أشخاص، نسبة الأشخاص الذين نمطهم التكويني AA هي P_0 والذين نمطهم Aa هي q_0 والذين نمطهم aa هي r_0.
كل زوج من هذا المجتمع يعطي مولودا نمطه التكويني مشكل من مورثة مأخوذة عشوائيا من نمط الأبوين.
1) ادرس النمط التكويني للجيل الأول لكل زوج ممكن (على شكل جدول).
2) تشكيل الأزواج يحدث عشوائيا. ونسمي P_1 ، q_1 ، r_1 نسب الأشخاص الذين نمطهم التكويني AA ، Aa ، aa في الجيل (1).
أ) بين أن $P_1=(P_0+\frac{1}{2}q_0)^2$ و $r_1=(r_0+\frac{1}{2}q_0)^2$
ب) تحقق أن $P_1 - r_1 = P_0 - r_0 = \alpha$
جـ) احسب P_1 ، r_1 ، q_1 بدلالة α
د) احسب P_2 ، q_2 ، r_2 بدلالة α ماذا تستنتج؟

الحل

1) الجدول التالي يمثل قانون احتمال الثنائية (X , Y):

X \ Y	AA	Aa	aa
AA	AA 100%	AA ، Aa 50% , 50%	Aa 100%
Aa	AA ، aA 50% , 50%	$AA(25\%)$ ، $Aa(50\%)$ $aa(25\%)$	Aa ، aa 50% , 50%
aa	Aa 100%	Aa ، aa 50% , 50%	aa 100%

2) أ) هناك 4 مسالك تؤدي إلى الحادث AA وهي:

$\bullet\xrightarrow{P_0} AA \bullet\xrightarrow{P_0} AA \bullet\xrightarrow{1} AA$ ، $\bullet\xrightarrow{P_0} AA \bullet\xrightarrow{q_0} Aa \bullet\xrightarrow{\frac{1}{2}} AA$

$\bullet\xrightarrow{q_0} Aa \bullet\xrightarrow{P_0} AA \bullet\xrightarrow{\frac{1}{2}} AA$ ، $\bullet\xrightarrow{q_0} Aa \bullet\xrightarrow{q_0} Aa \bullet\xrightarrow{\frac{1}{4}} AA$

واحتمال الحادث AA هو مجموع احتمال كل مسلك وعليه:

$$P_1 = P_0 \times P_0 \times 1 + P_0 \times q_0 \times \frac{1}{2} + q_0 \times P_0 \times \frac{1}{2} + q_0 q_0 \times \frac{1}{4}$$

$$=P_0^2+P_0q_0+\frac{1}{4}q_0^2=(P_0+\frac{1}{2}q_0)^2$$

ـ هناك أربعة مسالك تؤدي إلى $a\,a$ و هي

$$aa\xrightarrow{\frac{1}{4}}Aa\xrightarrow{q_0}Aa\xrightarrow{q_0}\bullet\quad ,\quad aa\xrightarrow{\frac{1}{2}}aa\xrightarrow{r_0}Aa\xrightarrow{q_0}\bullet$$

$$aa\xrightarrow{\frac{1}{2}}Aa\xrightarrow{q_0}aa\xrightarrow{r_0}\bullet\quad ,\quad aa\xrightarrow{1}aa\xrightarrow{r_0}aa\xrightarrow{r_0}\bullet$$

واحتمال الحادث $a\,a$ هو مجموع احتمال كل مسلك اي :

$$r_1=q_0\times q_0\times\frac{1}{4}+q_0r_0\times\frac{1}{2}+q_0r_0\frac{1}{2}+r_0\times r_0=q_0^2\times\frac{1}{4}+q_0r_0+r_0^2=(r_0+\frac{1}{2}q_0)^2$$

ب) $$P_1-r_1=(P_0+\frac{1}{2}q_0)^2-(r_0+\frac{1}{2}q_0)^2$$

$$=(P_0+\frac{1}{2}q_0-r_0-\frac{1}{2}q_0)(P_0+\frac{1}{2}q_0+r_0+\frac{1}{2}q_0)$$

$$=(P_0-r_0)(P_0+r_0+q_0)=P_0-r_0$$

لأن $P_0+r_0+q_0=1$

ج) $$P_1=(P_0+\frac{1}{2}q_0)^2=(P_0+\frac{1}{2}(1-r_0-P_0))^2=(P_0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_0-\frac{1}{2}P_0)^2$$

$$=(\frac{1}{2}P_0-\frac{1}{2}r_0+\frac{1}{2})^2=\left[\frac{1}{2}(P_0-r_0)+\frac{1}{2}\right]^2$$

$$=(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}(\alpha+1)^2$$

$$r_1=(r_0+\frac{1}{2}q_0)^2=\left[r_0+\frac{1}{2}(1-r_0-P_0)\right]^2=(r_0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_0-\frac{1}{2}P_0)^2$$

$$=(\frac{1}{2}r_0-\frac{1}{2}P_0+\frac{1}{2})^2=(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(1-\alpha)^2$$

لدينا $q_1=1-P_1-r_1=1-\frac{1}{4}(1+\alpha)^2-\frac{1}{4}(1-\alpha)^2=\frac{1}{2}(1-\alpha)(1+\alpha)$

د) إذا افترضنا أن الجيل الأول هو بمثابة الجيل الصفر والجيل الثاني بمثابة الجيل الأول فانه ينتج لدينا: $P_2-r_2=P_1-r_1=\alpha$ و $P_2=(P_1+\frac{1}{2}q_1)^2$ و $r_2=(r_1+\frac{1}{2}q_1)^2$

وهذا يعني أن $P_2=\frac{1}{4}(\alpha+1)^2$ و $r_2=\frac{1}{4}(1-\alpha)^2$ و $q_2=\frac{1}{2}(1-\alpha)(1+\alpha)$

نستنتج أن نسب الأنماط $A\,A$ ، $A\,a$ ، $a\,a$ تبقى ثابتة في كل الأجيال.

تطبيق 34 الاحتمالات الشرطية والمتتاليات

ذهب يونس إلى مدينة كبيرة لقضاء عطلة، حيث يقطع الشارع الرئيسي الذي يكتظ بأعمدة إشارة المرور الكهربائية الثلاثية اللون (أحمر - برتقالي - أخضر). نعتبر من أجل كل $n\geq1$ الحادثين التاليين :

E_n الحادث « يونس يوقف بواسطة اللون الأحمر او البرتقالي (R او O) لعمود المرور رقم n » .

$\overline{E}_n$ الحادث العكسي للحادث E_n .

نعتبر اللون البرتقالي كاللون الأحمر وليكن P_n احتمال E_n و q_n احتمال $\overline{E}_n$.

احتمال أن يكون العمود الأول احمرا أو برتقاليا هو $\frac{1}{8}$.

واحتمال ان يكون العمود رقم $(n+1)$ احمرا او برتقاليا إذا كان العمود رقم n احمرا او برتقاليا هو $\frac{1}{20}$.

واحتمال ان يكون العمود $(n+1)$ احمرا او برتقاليا إذا كان العمود رقم n اخضرا هو $\frac{9}{20}$.

1) نهتم في هذه الفقرة بالعمودين (1) و (2)

ا) اكمل الشجرة المجاورة.

ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد مرات ظهور اللون الأخضر في العمودين (1) و (2)

- اعط قانون X ثم احسب $E(X)$

العمود (1) العمود (2)

2) نعتبر الحالة العامة.

ا) اعط الاحتمالات الشرطية $P_{E_n}(E_{n+1})$ و $P_{\overline{E}_n}(E_{n+1})$

ب) بملاحظة أن $E_{n+1}=(E_{n+1}\cap E_n)\cup(E_{n+1}\cap\overline{E}_n)$

بين أن $P_{n+1}=\frac{1}{20}P_n+\frac{9}{20}q_n$

ثم استنتج عبارة P_{n+1} بدلالة P_n

3) (U_n) متتالية الأعداد الحقيقية المعرفة على IN^* بـ $U_n=28P_n-9$

ا) بين ان (U_n) هندسية يطلب تعيين أساسها k .

ب) عبر عن U_n بدلالة n ثم P_n بدلالة n .

جـ) عين نهاية P_n ان وجدت ثم اعط تفسيرا لهذه النتيجة.

✓ الحل

1) ا)



العمود (1) العمود (2)

ب) قيم X هي 0 ، 1 ، 2

X	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{160}$	$\frac{82}{160}$	$\frac{77}{160}$

$$P(X=0)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{160}$$

$$P(X=1)=\frac{7}{8}\times\frac{9}{20}+\frac{1}{8}\times\frac{19}{20}=\frac{82}{160}=\frac{41}{80}$$

$$P(X=2)=\frac{7}{8}\times\frac{11}{20}=\frac{77}{160}$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\,P_i=\frac{82}{160}+\frac{77\times 2}{160}=\frac{236}{160}=\frac{59}{40}$$

2) أ) $P_{E_n}(E_{n+1})=\frac{1}{20}$ و $P_{\overline{E}_n}(E_{n+1})=\frac{9}{20}$

ب) الحادثان $E_{n+1}\cap E_n$ و $E_{n+1}\cap\overline{E}_n$ غير متلائمين وبالتالي :

$$P_{n+1}=P(E_{n+1})=P(E_{n+1}\cap E_n)+P(E_{n+1}\cap\overline{E}_n)$$

$$=P(E_n)\times P_{E_n}(E_{n+1})+P(\overline{E}_n)\times P_{\overline{E}_n}(E_{n+1})=\frac{1}{20}P_n+\frac{9}{20}q_n$$

- استنتاج عبارة P_{n+1} بدلالة P_n :

لدينا $P_n+q_n=1$ إذن $P_{n+1}=\frac{1}{20}P_n+\frac{9}{20}(1-P_n)$

$$P_{n+1}=\frac{-8}{20}P_n+\frac{9}{20}=\frac{-2}{5}P_n+\frac{9}{20}$$

3) $U_{n+1}=28P_{n+1}-9=28\left(-\frac{2}{5}P_n+\frac{9}{20}\right)-9$

$$=-\frac{56}{5}P_n+\frac{18}{5}=-\frac{2}{5}(28P_n-9)=-\frac{2}{5}U_n$$

إذن (U_n) هندسية أساسها $k=-\frac{2}{5}$

$$U_n=U_1\times k^{n-1}=\left(-\frac{11}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$P_n=\frac{1}{28}\left[-\frac{11}{2}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}+9\right]=-\frac{11}{56}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}+\frac{9}{28}$$

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\frac{9}{28}$$

عندما يجتاز يونس هذه المدينة فإن احتمال توقيفه بواسطة عمود مع العلم أنه اجتاز العمود الأول هو $\frac{9}{28}$.

تمارين و مسائل

1 - نرمي حجري نرد لونيهما على التوالي أخضر وابيض، ونشكل عددا من رقمين، حيث ان رقم العشرات هو الرقم الظاهر على الحجر الأخضر ورقم الآحاد هو الرقم الظاهر على الحجر الأبيض.

1) كم من عدد يمكن تشكيله ؟

2) لتكن الأحداث التالية :

A " العدد المشكل يقبل القسمة على 5 "

B " العدد المشكل أكبر تماما من 36 "

C " العدد المشكل محصور بين 14 و 32

احسب احتمالات كل من الحوادث التالية :

A ، $\overline{B}$ ، B ، C ، $A\cap B$ ، $A\cup B$ ، $B\cap C$ ، $B\cup C$ ، $A\cap C$ ، $A\cup C$

2 - نعتبر A و B حادثين بحيث $P(A)=0,8$ و $P(B)=0,4$

1) هل $P(A\cap B)=0,1$ ؟

2) ماذا يحدث لو كانت $P(A\cap B)=0,2$ او $P(A\cap B)=0,4$ ؟

3) إلى اي مجال ينتمي $P(A\cap B)$ ؟

3 - كيس يحتوي على 5 كرات ثلاث منها بيضاء والأخرى سوداء، نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من هذا الكيس، وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة.

1) عين مجموعة قيم X .

2) عين قانون احتمال X ثم احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$

4 - اليك قانون احتمال متغير عشوائي Y :

Y	-1	1	1	2	3
P	0,03	0,17	0,4	a	b

احسب a بحيث $E(Y)=0$ ثم عين عندئذ $\sigma(Y)$.

5 - لتكن A ، B ، C ثلاثة حوادث.

1) إذا علمت أن $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$

احسب $P(A\cap B)$ و $P_A(B)$ و $P_B(A)$

2) إذا علمت أن $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P_A(B)=\frac{1}{4}$ و $P_{\overline{A}}(B)=\frac{1}{2}$ احسب $P(B)$.

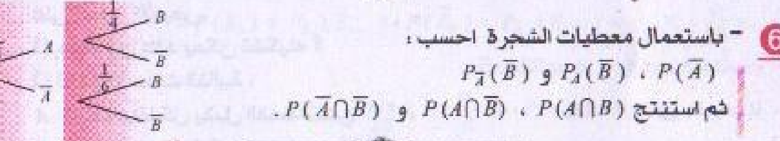
3) بين أن $P_A(\overline{B})=1-P_A(B)$.

---

6 - باستعمال معطيات الشجرة احسب :

$P(\overline{A})$ ، $P_A(\overline{B})$ و $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

ثم استنتج $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap \overline{B})$ و $P(\overline{A}\cap \overline{B})$.



---

7 - بعد عملية لسبر الآراء في ثانوية تحتوي على 60% إناث و 40% ذكور علمنا أن 40% من الإناث و 20% من الذكور يتكلمون الانجليزية.

1) انقل ثم اكمل الشجرة المتقلة المجاورة :

إناث: يتكلمون الانجليزية / لا يتكلمونها

ذكور: يتكلمون الانجليزية / لا يتكلمونها

2) نختار عشوائيا طالبا من الثانوية ونسمي C الحادث " بنت "

و E الحادث " ذكر "

و A الحادث " يتكلم الانجليزية "

أ) احسب احتمال الحادثين $C\cap A$ و $E\cap A$ ثم استنتج قيمة $P(A)$.

ب) احسب $P_A(C)$.

---

8 - كيس يحتوي على 5 كرات ثلاث منها سوداء مرقمة 1 ، 2 ، 3 والأخرتين بيضاويتين مرقمتين بـ 1 و 2. نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من هذا الكيس.

1) ما هو احتمال الحادث A " الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون " (استعمل قانون العد) ؟

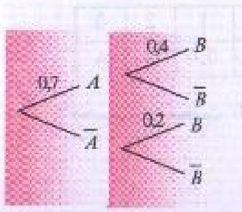
2) ما هو احتمال الحادث B " مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين يساوي 5 " ؟

3) ما هو احتمال B علما أن A محقق ؟

---

9 - نعتبر الحادثين A و B لتجربة عشوائية.

ولدينا شجرة الاحتمالات التالية الموافقة لهذه التجربة :



1) اعط تفسيرا للأعداد 0,7 ، 0,4 ، 0,2

ثم اكمل هذه الشجرة.

2) احسب $P(A\cap B)$ و $P(\overline{A}\cap B)$ ثم استنتج $P(B)$.

3) احسب $P(A\cap \overline{B})$ و $P(\overline{A}\cap \overline{B})$ ثم احسب $P(\overline{B})$ بطريقتين مختلفتين.

4) احسب $P_B(A)$.

---

10 - كيس يحتوي على ثلاث كرات سوداء وكرتين بيضاوتين نسحب عشوائيا كرتين الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع. وليكن E الحادث " الكرة الأولى بيضاء " و F الحادث " الكرة الثانية سوداء ".

1) احسب $P(E)$ ، $P_E(F)$ و $P(E\cap F)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ) نسحب الكرة ونسجل لونها ثم نرجعها إلى الكيس.

ب) نسحب الكرة ونسجل لونها ولا نرجعها إلى الكيس.

2) ما هو احتمال الحادث B " الكرتان مختلفتا اللون " في كل حالة من الحالتين السابقتين ؟

---

11 - في مجموعة لدينا 40% من عناصرها تمارس لعبة كرة قدم، و 60% من عناصر هذه المجموعة هم رجال وأن 30% منهم لا يمارسونها .ما هو احتمال أن امرأة مختارة عشوائيا لا تمارس هذه اللعبة ؟

---

12 - اعطت دراسة اجراها مسير مؤسسة لنشر الكتب أن عدد الكتب المباعة في كل شهر تتبع قانون الاحتمال التالي :

n	0	200	500	800	1000	2000
p	0,04	0,16	0,4	0,25	0,09	0,06

نعتبر أن مبيعات كل شهر مستقلة عن مبيعات الشهور الأخرى

احسب احتمال الأحداث التالية :

1) " يبيع 800 كتاب في جانفي و 500 كتاب في فيفري"

2) "يبيع 2000 في سبتمبر و 1000 في اكتوبر و 500 في نوفمبر"

3) "يبيع 2000 كتاب خلال الثلاثي الأخير من السنة."

---

13 - حجري نرد، الأول مرقم بـ 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 3 والثاني مرقم بـ : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية للحجرين القيمة المطلقة لفرق الرقمين المسجلين عليهما.

نقبل أن كل الأوجه لها نفس حظ الظهور لكلا الحجرين.

1) ما هي قيم X الممكنة ؟

2) عين قانون احتمال X ثم احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$

3) إذا علمت أن $X=0$ ما هو احتمال التحصل على الرقم 1 على كل حجر ؟

14 - كيس U يحتوي على كرة بيضاء وثلاث كرات حمراء وكيس V يحتوي على 5 كرات بيضاء وثلاث حمراء.
نسحب عشوائيا كرة من كلا الكيسين ونبدل لهما الكيس.
احسب احتمال الحادثين التاليين :
A " الكيس U لا يحتوي إلا على الكرات الحمراء "
B " كلا الكيسين يحتفظ بنفس التركيبة الأولى ".

15 - لدينا قطعة نقدية مزيفة بحيث احتمال ظهور الظهر هو $\frac{2}{3}$.
وليكن U و V كيسان بحيث :
الكيس U يحتوي على 5 قصاصات حمراء و 4 خضراء.
والكيس V يحتوي على ثلاث قصاصات حمراء وقصاصتين خضراوتين.
نرمي القطعة النقدية بحيث إذا ظهر الظهر نسحب قصاصة من الكيس U وفي حالة العكس نسحب القصاصة من V .
ما هو احتمال التحصل على قصاصة حمراء ؟

16 - لدينا حجر نرد متزن حيث أن أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 .
ولدينا ثلاثة أكياس U_1 ، U_2 ، U_3 كل واحد منها يشمل k كرة حيث k عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3 .وأن هذه الكرات لا نستطيع أن نفرق بينها عند اللمس
يحتوي U_1 على ثلاث كرات سوداء
و U_2 يحتوي على كرتين سوداوتين
و U_3 على كرة سوداء، وكل الكرات الأخرى الموجودة في الأكياس بيضاء.
حيث يقوم لاعب برمي النرد :
- إذا تحصل على الرقم 1 يسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1 مسجلا لونها ثم يرجعها إليه.
- إذا تحصل على مضاعف 3 يسحب عشوائيا كرة من U_2 مسجلا لونها ثم يرجعها إليه
- إذا تحصل على رقم يختلف عن 1 وليس مضاعفا لـ 3 يسحب عشوائيا من الكيس U_3 كرة مسجلا لونها ثم يرجعها إليه.
لتكن الأحداث A ، B ، C ، N المعرفة كما يلي :
A " نتحصل على الرقم 1 عند رمي الحجر "
B " نتحصل على مضاعف 3 عند رمي الحجر "
C " نتحصل على الرقم يختلف عن 1 وليس مضاعفا لـ 3 "
N " الكرة المسحوبة سوداء "
(اللاعب يلعب شوطا واحدا).
1) بين أن احتمال تحصله على كرة سوداء يساوي $\frac{5}{3k}$.
2) احسب احتمال أن يظهر الرقم 1 على الحجر علما أن الكرة المسحوبة سوداء.

3) عين k بحيث يكون احتمال الحصول على كرة سوداء أكبر من $\frac{1}{2}$.
4) عين k بحيث يكون احتمال التحصل على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{3}$.

17 - ثلاثة صيادين C_1 ، C_2 ، C_3 يطلقون النار في آن واحد على أرنب وبصفة مستقلة عن بعضهم البعض، وليكن P_1 ، P_2 ، P_3 احتمالات إصابة الصيادين C_1 ، C_2 ، C_3 للأرنب على التوالي.
احسب احتمال إصابة الأرنب على الأقل من طرف صياد واحد.
يعطى $P_1 = 0,15$ ، $P_2 = 0,20$ ، $P_3 = 0,35$.

18 - لنعتبر ثلاثة أكياس U_1 ، U_2 ، U_3 .
الكيس U_1 يحتوي على كرتين سوداويتين وثلاث كرات حمراء.
والكيس U_2 يحتوي على كرة سوداء و 4 حمراء.
و U_3 يحتوي على ثلاث كرات سوداء و 4 حمراء .
تتمثل التجربة في سحب كرة عشوائيا من U_1 وأخرى من U_2 ووضعهما في U_3 ، ثم سحب كرة عشوائيا من U_3.
من أجل كل i من $\{1 ، 2 ، 3\}$ نرمز بـ :
N_i إلى الحادث سحب كرة سوداء من الكيس U_i
و R_i إلى الحادث سحب كرة حمراء من U_i .
1) انقل ثم اكمل الشجرة المجاورة :
2-أ) احسب احتمال الأحداث التالية :
$N_1 \cap N_2 \cap N_3$ و $N_1 \cap R_2 \cap N_3$
ب) استنتج احتمال الحادث $N_1 \cap N_3$
جـ) احسب بنفس الطريقة احتمال الحادث $R_1 \cap N_3$
3) استنتج من السؤال (3) احتمال الحادث N_3
4) هل الحادثان N_1 و N_3 مستقلان ؟
5) إذا علمت أن الكرة المسحوبة من U_3 سوداء فما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء ؟

19 - موظف يلتحق بعمله بواسطة حافلة موضوعة تحت تصرف العمال وهذا إذا وصل في وقت مرورها وفي حالة تأخره يركب حافلة ثمن التذكرة فيها هو $1,5\,DA$
- إذا كان هذا الوظف في الوقت المناسب في يوم ما فإن احتمال أن يتأخر في اليوم الموالي هو $\frac{1}{5}$
- إذا تأخر في يوم ما فإن احتمال أن يتأخر في اليوم الموالي هو $\frac{1}{20}$.

من أجل عدد طبيعي n غير معدوم نرمز بـ R_n إلى الحادث " الموظف متأخر في اليوم n "
وليكن P_n احتمال R_n و q_n احتمال $\overline{R_n}$ نضع $P_1=0$

1) أ) عين الاحتمالات الشرطية التالية :

$P_{R_n}(R_{n+1})$ و $P_{\overline{R_n}}(R_{n-1})$

ب) عين $P(R_{n+1}\cap R_n)$ بدلالة P_n و $P(R_{n+1}\cap R_n)$ بدلالة q_n

ج) عبر عن P_{n+1} بدلالة P_n و q_n ثم استنتج أن $P_{n+1}=\frac{1}{5}-\frac{3}{20}P_n$

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع $V_n=P_n-\frac{4}{23}$

أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{-3}{20}\right)$.

ب) عبر عن V_n ثم P_n بدلالة n .

ج) بين أن المتتالية (P_n) متقاربة معينا نهايتها.

20 - شركة تكلف مؤسسة مختصة في صبر الأراء بواسطة الهاتف للتحقيق حول نوعية منتوجها، كل محقق له قائمة أشخاص يتصل بهم، أثناء المكالمة الهاتفية الأولى احتمال أن يكون المهتوف إليه غائبا هو 0,4 .

- إذا علمت أن المهتوف إليه حاضر فإن احتمال أن يقبل الإجابة على الأسئلة هو 0,2

1) ليكن A_1 الحادث " الشخص المهتوف إليه غائب في المكالمة الأولى "
R_1 الحادث " الشخص يقبل الإجابة على الأسئلة خلال المكالمة الأولى "
ما هو احتمال R_1 ؟

2) إذا كان الشخص غائبا أثناء المكالمة الأولى فإننا نهاتفه مرة ثانية في ساعة أخرى عندئذ فإن احتمال أن يكون غائبا هو 0,3 وإذا علمنا أنه إذا كان حاضرا في المكالمة الثانية فإن احتمال أن يقبل الإجابة على الأسئلة هو 0,2 .

- إذا كان الشخص غائبا خلال المكالمة الثانية نحاول الاتصال به مرة أخرى وليكن A_2 الحادث " الشخص غائب أثناء المكالمة الثانية" و R_2 " الشخص يقبل الإجابة على الأسئلة المطروحة خلال المكالمة الثانية ".
R هو الحادث " الشخص يقبل الإجابة على الأسئلة "
بين أن احتمال R هو 0,176 (استعمل الشجرة).

3) إذا علمت أن الشخص قبل الإجابة على الأسئلة فما هو احتمال أن تكون الإجابة خلال المكالمة الأولى ؟

21 - A و B حادثان بحيث $P(A)=\frac{3}{7}$ و $P(A\cup B)=\frac{5}{7}$ و $P(B)=a$

1) احسب a في كل حالة من الحالات التالية :

أ) A و B غير متلائمان.

ب) A محتواة في B

ج) A و B مستقلان.

2) في كل حالة من الحالات السابقة احسب $P_A(B)$ و $P_B(A)$

22 - في قسم يحتوي على 30 تلميذا، شكل ناديين للتصوير والمسرح.
نادي التصوير مشكل من 10 أشخاص والآخر من 6 أشخاص.
هناك تلميذان عضوان في كلا الناديين.

1) نسأل تلميذا من القسم مأخوذ عشوائيا ونسمي :
P الحادث " التلميذ ينتمي إلى نادي التصوير "
T الحادث " التلميذ ينتمي إلى نادي المسرح "
بين أن P و T مستقلان.

2) أثناء حصة لنادي التصوير كل الأعضاء حاضرين، نختار تلميذا عشوائيا ليقوم بتصوير عضو ثان مختارا عشوائيا.

أ) نسمي T_1 الحادث " التلميذ الأول المختار ينتمي إلى نادي المسرح " احسب $P(T_1)$

ب) نسمي T_2 الحادث "التلميذ الذي أخذت صورته ينتمي إلى نادي المسرح"
احسب $P_{T_1}(T_2)$ و $P_{\overline{T_1}}(T_2)$ ثم استنتج $P(T_2\cap T_1)$ و $P(T_2\cap\overline{T_1})$
(نستطيع استعمال شجرة الاحتمالات).

ج) بين أن احتمال أن يكون التلميذ الذي أخذت صورته ينتمي إلى نادي المسرح هو 0,2

23 - لعبة تتمثل في سحب ثلاث كرات عشوائيا في آن واحد من كيس يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 خضراء.

- إذا تحصل اللاعب على ثلاث كرات حمراء نسمي هذا الحادث R_3 ويتحصل من خلاله على 50 دج .

- إذا تحصل على كرتين حمراوين و كرة خضراء نسمي هذا الحادث R_2 ويتحصل من خلاله على 30 دج.

- و في الأخير إذا تحصل على أقل من كرتين حمراوين نسمي هذا الحادث E و لا يتحصل على أية مكافأة.

1) بين أن احتمال الحادثين R_2 و R_3 هما $P(R_2)=\frac{5}{12}$ و $P(R_3)=\frac{1}{12}$
(استعمل قانون العد).

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه ربح اللاعب، اعط قانون احتمال X معينا $E(X)$ و $\sigma(X)$.

24 - يقوم أحمد برميات متتالية لرماح، عندما يُصيب الهدف في رمية فإن احتمال أن يُصيبه في الرمية الموالية هو $\frac{1}{3}$ وعندما لا يُصيب الهدف في رمية فإن احتمال أن لا يُصيبه في الرمية الموالية هو $\frac{4}{5}$

نفرض أن له في الرمية الأولى نفس حظوظ إصابة الهدف أو عدم إصابته.
من أجل كل عدد طبيعي n موجب تماما نعتبر الأحداث التالية :
A_n الحادث " أحمد يُصيب الهدف في الرمية n "
B_n الحادث " أحمد لا يُصيب الهدف في الرمية n "
نضع $P_n = P(A_n)$

1) احسب P_1 و بين أن $P_2 = \frac{4}{15}$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ لدينا $P_n = \frac{2}{15} P_{n-1} + \frac{1}{5}$

3) من أجل كل $n \geq 1$ نضع $U_n = P_n - \frac{3}{13}$
بين أن (U_n) هندسية يطلب إيجاد أساسها و هو حدها الأول U_1

4) اكتب U_n ثم P_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

25 - الجدول التالي يعطينا قانون احتمال الثنائية $(X \cdot Y)$ لمتغير عشوائي :
1) اكمل الجدول.
2) هل المتغيرين X و Y مستقلان؟

Y \ X	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

26 - الجدول التالي يعطينا قانون احتمال الثنائية $(X \cdot Y)$ لمتغيرين عشوائيين.
هل المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان ؟

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

27 - X و Y متغيران عشوائيان معرفان على مجموعة E بـ :
$X(E) = \{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots \cdot x_r\}$ ، $Y(E) = \{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \ldots \cdot y_s\}$
Z و T متغيران عشوائيان معرفان بـ $Z = X + Y$ و $T = X \times Y$

1) بين أن $E(Z) = E(X) + E(Y)$

2). بين أنه إذا كان X و Y مستقلين فإن $E(T) = E(X) \times E(Y)$

3). بين أنه إذا كان X و Y مستقلين فإن $V(Z) = V(X) + V(Y)$

28 - نعتبر قطعتين نقديتين مغشوشتين p_1 ، p_2.
عندما نرمي القطعة p_1 فإن احتمال الحصول على الظهر هو $\frac{2}{3}$.

عندما نرمي القطعة p_2 فإن احتمال الحصول على الوجه هو $\frac{2}{9}$.
في الشوط الأول من اللعبة نختار قطعة عشوائيا ثم نرميها.
إذا تحصلنا على الوجه نلعب الشوط الثاني بالقطعة p_1 وإذا تحصلنا على الظهر نلعب الشوط الثاني بالقطعة p_2.
وتطبق قاعدة اللعب التالية :
من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.
- إذا تحصلنا على الوجه في الشوط رقم n فإننا نلعب الشوط رقم $(n+1)$ بالقطعة p_1
وإذا تحصلنا على الظهر في الشوط رقم n فإننا نلعب الشوط رقم $(n+1)$ بالقطعة p_2.
نسمي f_n احتمال الحصول على الوجه في الشوط رقم n :

1) احسب f_1 و f_2.

2) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ فإن $f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n + \frac{2}{9}$

3) لتكن (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \rangle 1$ بـ $U_n = f_n - \frac{1}{4}$
ا) برهن أن المتتالية (U_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة f_n بدلالة n.

4) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نسمي X_n المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 إذا كانت النتيجة في الشوط رقم n هي الوجه و 0 إذا كانت غير ذلك.
ا) عين قانون احتمال المتغيرين X_1 و X_2.
ب) احسب الأمل الرياضي لـ X_1 و X_2.
جـ) هل المتغيرين X_1 و X_2 مستقلان ؟